رابطه $|x|\le c$ تبدیل به نامعادله $x^2\le c^2$ شده است و سپس به کمک جدول تعیین علامت جواب نامعادله پیدا شده است.

۴- اگر $c\ge 0$ و $-c\le a\le c$ ثابت کنید $|a|\le c$.

$$-c\le a\le c\to\begin{cases}-c\le a\to a+c\ge 0\\ a\le c\to a-c\le 0\end{cases}\to(a+c)(a-c)\le 0\to a^2-c^2\le 0\to a^2\le c^2\xrightarrow{c\ge 0}|a|\le c$$

مسائل صفحه ۳۵

۱- برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $|-a|=|a|$ و $|a|^2=a^2$

$$|a|^2=\begin{cases}\text{اگر } a\ge 0\xrightarrow{|a|=a}|a|^2=a^2\\ \text{اگر } a<0\xrightarrow{|a|=-a}|a|^2=(-a)^2=a^2\end{cases}\Rightarrow|a|^2=a^2$$

$$|-a|=\begin{cases}\text{اگر } a>0\to -a<0\xrightarrow{|-a|=-(-a)}|-a|=a\\ \text{اگر } a\le 0\to -a\ge 0\xrightarrow{|-a|=-a}|-a|=-a\end{cases}\Rightarrow|-a|=|a|$$

۲- برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $-|a|\le a\le|a|$

$$\begin{cases}a\ge 0\to|a|=a,-|a|\le a\to-|a|\le a\le|a|\\ a<0\to|a|=-a,a\le|a|\to-|a|\le a\le|a|\end{cases}\Rightarrow-|a|\le a\le|a|$$

۳- برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $-|a|-|b|\le a+b\le|a|+|b|$ و نتیجه بگیرید:

$$|a+b|\le|a|+|b|$$

(خاصیت بالا را خاصیت نامساوی مثلث می‌نامند.)

$$\begin{matrix}-|a|\le a\le|a|\\ -|b|\le b\le|b|\end{matrix}\Rightarrow-|a|-|b|\le a+b\le|a|+|b|$$

$$\to-(|a|+|b|)\le a+b\le(|a|+|b|)\xrightarrow{-a\le x\le a\to|x|\le a}|a+b|\le|a|+|b|$$

۴- برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید: $|y|\le|x|+|y-x|$ و نتیجه بگیرید:

$$|y|-|x|\le|y-x|$$

$$|x+y|\le|x|+|y|\xrightarrow{y\to y-x}|x+(y-x)|\le|x|+|y-x|\to|y|\le|x|+|y-x|\to|y|-|x|\le|y-x|$$

۵- اگر $c>0$ و $|a|>c$ نشان دهید $a>c$ یا $a<-c$.

$$|a|>c\xrightarrow{c>0}a^2>c^2\to a^2-c^2>0\to(a-c)(a+c)>0$$

a		-c		c	
a^2-c^2	+		-		+

بنابراین جواب نامعادله برابر است با: $a>c$ یا $a<-c$

۶- به کمک تعیین علامتِ عبارت‌های داخل قدر مطلق، ضابطه‌ی توابع زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$

x		0	
x	-	0	+

ب) $f(x)=|x+1|-2$

x		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$

$$\begin{cases} x+1-2 & x\geq -1 \\ -x-1-2 & x<-1 \end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq -1 \\ -x-3 & x<-1 \end{cases}$$

ج) $y=|x-1|+|x+2|$

x		-2		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$

$$\begin{cases} -x+1-x-2 & x<-2 \\ -x+1+x+2 & -2\leq x<1 \\ x-1+x+2 & x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} -2x-1 & x<-2 \\ 3 & -2\leq x<1 \\ 2x+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

تمرین در کلاس صفحه ۳۶

معادلات قدر مطلقی زیر را حل کنید.

الف) $||x|-1|=5 \rightarrow \begin{cases} |x|-1=5 \rightarrow |x|=6 \rightarrow x=\pm 6 \\ |x|-1=-5 \rightarrow |x|=-4 \quad \times \end{cases}$ غیر قابل قبول

برای قسمت ب و ج ابتدا عبارات داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم سپس در هر محدوده معادله به‌دست آمده را حل می‌کنیم.

ب) $|2x-1|+|x|=7$

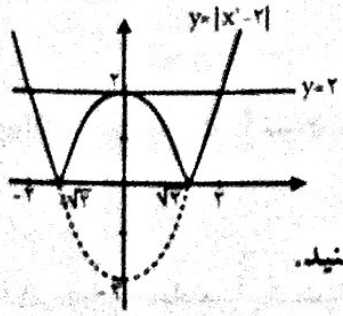
x		0		$\frac{1}{2}$	
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$

$$|2x-1|+|x|=7 \rightarrow \begin{cases} \text{اگر: } x<0 \rightarrow -2x+1-x=7 \rightarrow -3x=6 \rightarrow x=-2 & \checkmark \\ \text{اگر: } 0\leq x\leq \frac{1}{2} \rightarrow -2x+1+x=7 \rightarrow -x=6 \rightarrow x=-6 & \times \\ \text{اگر: } x\geq \frac{1}{2} \rightarrow 2x-1+x=7 \rightarrow 3x=8 \rightarrow x=\frac{8}{3} & \checkmark \end{cases}$$

ج) $x|x|=-4 \rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x\geq 0 \rightarrow x^2=-4 \\ \text{اگر } x<0 \rightarrow -x^2=-4 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\begin{cases} +2 & \times \\ -2 & \checkmark \end{cases} \end{cases}$

فعالیت صفحه ۳۷

در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=x^2-2$ آمده است.



۱ـ با توجه به علامت x^2-2 نمودار تابع $f(x)=|x^2-2|$ را رسم کنید.

۲ـ نمودار $y=2$ را رسم کنید و محل تلاقی آن با نمودار تابع $f(x)=|x^2-2|$ را مشخص کنید.

۳ـ جواب‌های معادله‌ی $|x^2-2|=2$ را با استفاده از بند ۲ به‌طور تقریبی تعیین کنید.

با توجه به نمودار جواب‌های معادله $|x^2-2|=2$ عددهای ۲- و ۰ و ۲ می‌باشد.

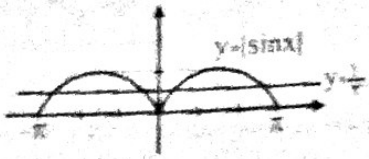
۴ـ به روش جبری معادله‌ی $|x^2-2|=2$ را حل کرده و با جواب‌های به‌دست آمده در بند ۳ مقایسه کنید.

$$|x^2-2|=2 \rightarrow \begin{cases} x^2-2=2 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=-2,2 \\ x^2-2=-2 \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

جواب‌های به‌دست آمده با بند ۳ مطابقت دارد.

تمرین در کلاس صفحه ۳۸

۱ـ به روش هندسی جواب‌های معادله‌ی $|\sin x|=\frac{1}{2}$ را در بازه $[-\pi,\pi]$ به‌دست آورید.



نمودار دو تابع $y=\frac{1}{2}$ و $y=|\sin x|$ را رسم می‌کنیم.

این دو تابع در چهار نقطه با یکدیگر برخورد دارند. نقاطی به طول‌های $\frac{\pi}{6}$، $\frac{5\pi}{6}$، $\frac{-\pi}{6}$ و $\frac{-5\pi}{6}$ بنابراین معادله $|\sin x|=\frac{1}{2}$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ دارای چهار جواب است.

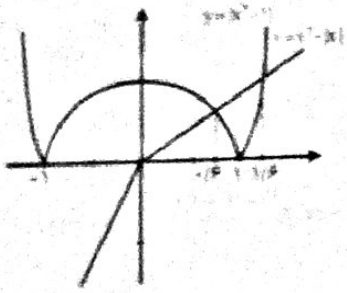
۲ـ معادله‌ی $|x^2-1|=2x-|x|$ را با روش هندسی حل کنید.

نمودار تابع $y=|x^2-1|$, $y=2x-|x|$ را رسم می‌کنیم.

ابتدا تابع $y=2x-|x|$ را به صورت دو ضابطه‌ای بیان می‌کنیم:

$$y=2x-|x|=\begin{cases}2x-x=x & x\geq 0\\ 2x+x=3x & x<0\end{cases}$$

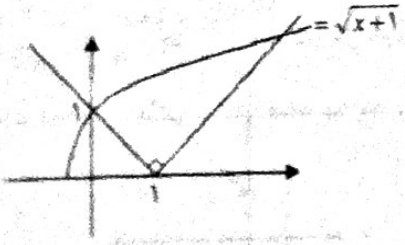
و آن را رسم می‌کنیم:



و در ادامه تابع $y=|x^2-1|$ را در همان دستگاه رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار دو تابع جواب‌های معادله $|x^2-1|=2x-|x|$ اعداد تقریبی ۰/۶ و ۱/۶ می‌باشند.

۳ـ در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=\sqrt{x+1}$ و یک تابع قدرمطلقی که نمودار آن نسبت به خط $x=1$ متقارن است دیده می‌شود. معادله‌ای که جواب‌های آن طول نقاط تلاقی این دو منحنی است را تشکیل دهید و به روش جبری آن را حل کنید.



معادله مورد نظر: $\sqrt{x+1}=|x-1|$

حل به روش جبری: $\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x+1=x^2-2x+1\to x^2-3x=0\to x(x-3)=0\begin{cases}x=0\\ x=3\end{cases}$

مسائل صفحه ۳۹

۱ـ هر یک از معادلات قدر مطلقی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آن را مشخص کنید.

الف) $|2t-1|-3=0\to|2t-1|=3\to\begin{cases}2t-1=3\to t=2 & ✓\\ 2t-1=-3\to t=-1 & ✓\end{cases}$

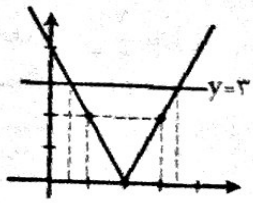
ب) $|y^2-2|=7\to\begin{cases}y^2-2=7\to y^2=9\to y=\pm 3 & ✓\\ y^2-2=-7\to y^2=-5 & \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$

ج) $|2x-3|=3-2x\to|2x-3|=-(2x-3)\xrightarrow{a\leq 0\to|a|=-a}$ $2x-3\leq 0\to x\leq\frac{3}{2}$

۲ ـ نمودار هر یک از روابط زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y=3$ معادله به دست آمده را با روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=|2x-4|$

x	۱	۲	۳
y	۲	۰	۲



$|2x-4|=3$: معادله به‌دست آمده ⇐

روش هندسی: محل تلاقی دو تابع $y=|2x-4|$ و $y=3$ را پیدا می‌کنیم نقاط به طول‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{7}{2}$ و این جواب معادله می‌باشد.

روش جبری:

$$|2x-4|=3\rightarrow\begin{cases}2x-4=3\rightarrow x=\frac{7}{2}\\ 2x-4=-3\rightarrow x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ب) $y=|x|+|1-x|$

عبارات داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

x		۰		۱	
۱-x	+		+	۰	-
x	-	۰	+		+

روش جبری:

$x<0\Rightarrow y=-x+1-x=-2x+1=3\Rightarrow -2x=2\Rightarrow x=-1$ ✓

$0\le x<1\Rightarrow y=x+1-x=3\Rightarrow 1=3$ ✗

$x\ge 1\Rightarrow y=x+x-1=3\Rightarrow 2x-1=3\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$ ✓

روش هندسی: چون دو نمودار در دو نقطه به طول $x=2$ و $x=-1$ یکدیگر را قطع کرده‌اند پس دو جواب داریم.

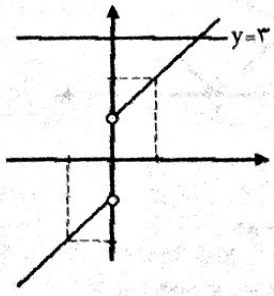
ج) $y=x+\frac{x}{|x|}\quad x\neq 0$

$x<0\rightarrow y=x+\frac{x}{-x}\rightarrow y=x-1$

x	-۱	⊙
y	-۲	-۱

$x>0\rightarrow y=x+\frac{x}{x}\rightarrow y=x+1$

x	⊙	۱
y	۱	۲



روش هندسی: نمودار تابع $y=3$ فقط در یک نقطه با نمودار تابع $y=x+\frac{x}{|x|}$ برخورد دارد، نقطه‌ای به طول ۲، پس جواب معادله $x=2$ می‌باشد.

روش جبری: $x>0\rightarrow x+1=3\rightarrow x=2$ ✓ $\quad x<0\rightarrow x-1=3\rightarrow x=4$ ✗

تمرین در کلاس صفحه ۳۹

۱ ـ هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2-5x+6\le 0$

$\underbrace{x^2-5x+6}_{p(x)}\le 0\rightarrow p(x)=0\rightarrow x=2,3$

x		۲		۳	
p(x)	+	۰	-	۰	+

جواب نامعادله : $\{x\mid x\in\mathbb{R}, 2\le x\le 3\}$

ب) $|۲-۳x|>۵$

روش اول: $(۲-۳x)^۲>۵^۲ \rightarrow (۲-۳x)^۲-۵^۲>۰$ دو طرف نامنفی است، به توان ۲ می‌رسانیم

$(۲-۳x-۵)(۲-۳x+۵)>۰ \rightarrow \underbrace{(-۳x-۳)(-۳x+۷)}_{p(x)}>۰ \rightarrow p(x)=۰ \rightarrow x=-۱, \frac{۷}{۳}$

x		-۱		$\frac{۷}{۳}$	
$-۳x-۳$	+	۰	−		−
$-۳x+۷$	+		+	۰	−
$p(x)$	+	۰	−	۰	+

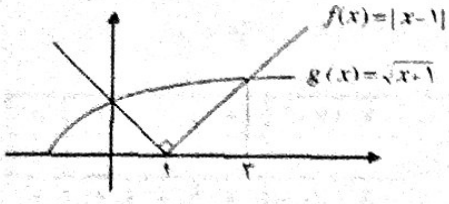
مجموعه جواب: $\{x \mid x\in IR, x<-۱ \quad \text{یا} \quad x>\frac{۷}{۳}\}$

روش دوم:

$$\begin{cases} ۲-۳x>۵ \\ ۲-۳x<-۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳x>۳ \rightarrow x<\frac{۳}{-۳} \rightarrow x<-۱ \\ -۳x<-۷ \rightarrow x>\frac{-۷}{-۳} \rightarrow x>\frac{۷}{۳} \end{cases} \Rightarrow D=\{x \mid x\in R, x<-۱ \quad \text{یا} \quad x>\frac{۷}{۳}\}$$

فعالیت ۱۰ صفحه ۴۱

در شکل روبه‌رو نمودار توابع $f(x)=|x-۱|$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ رسم شده است.



۱ـ نقاط x که $f(x)<g(x)$ را از طریق شکل مشخص کنید.

مجموعه نقاط x: $\{x \mid x\in IR, ۰<x<۳\}$

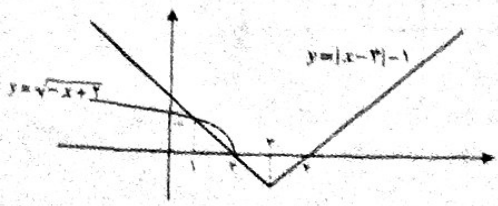
۲ـ مجموعه‌ی نقاط x که در آن نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می‌گیرد را مشخص کنید.

مجموعه نقاط x: $\{x \mid x\in IR, ۰<x<۳\}$

۳ـ مجموعه نقاط بند (۲) با نقاط بند (۱) چه رابطه‌ای دارند؟ دو مجموعه با هم برابر هستند.

تمرین در کلاس صفحه ۴۲

با توجه به نمودارهای رسم شده، نامعادله‌ی $\sqrt{-x+۲} \geq |x-۳|-۱$ را حل کنید.



با توجه به نمودار مقادیر $\sqrt{-x+۲}$ از مقادیر $|x-۳|-۱$ در بازه $[۱, ۲]$ بیش‌تر است پس جواب نامعادله $\{x \mid x\in IR, ۱\leq x\leq ۲\}$ می‌باشد.

مسائل صفحه ۴۲

نامعادلات زیر را با روش جبری حل کنید.

۱) $x^۳-۲x^۲+x\geq ۰ \rightarrow x(x^۲-۲x+۱)\geq ۰ \rightarrow \underbrace{x(x-۱)^۲}_{p(x)}\geq ۰$

x		۰		۱	
$(x-۱)^۲$	+		+	۰	+
x	−	۰	+		+
$P(x)$	−	۰	+	۰	+

مجموعه جواب ⇐ : $\{x \mid x\in IR, x\geq 0\}$

۲) $\frac{۲x-۱}{x}>۱ \rightarrow \frac{۲x-۱}{x}-۱>۰ \rightarrow \frac{۲x-۱-x}{x}>۰ \rightarrow \frac{x-۱}{x}>۰$

x		۰		۱	
$x-1$	−		−	۰	+
x	−	۰	+		+
$\frac{x-1}{x}$	+	ت	−	۰	+

مجموعه جواب ⇐ : $\{x \mid x\in IR , x<0$ یا $x>1\}$

$$3)\ \frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}\le 2 \to \frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}-2\le 0 \to \frac{(x+1)(x-1)-x(x)-2x(x-1)}{x(x-1)}\le 0$$

$$\to \frac{x^2-1-x^2-2x^2+2x}{x(x-1)}\le 0 \to \frac{-2x^2+2x-1}{x^2-x}\le 0$$

ریشه‌یابی : $-2x^2+2x-1=0 \Rightarrow \Delta=-4<0 \Rightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد

x		۰		۱	
$-2x^2+2x-1$	−		−		−
$x(x-1)$	+	۰	−	۰	+
$P(x)$	−	ت	+	ت	−

مجموعه جواب ⇐ : $\{x \mid x\in IR , x<0$ یا $x>1\}$

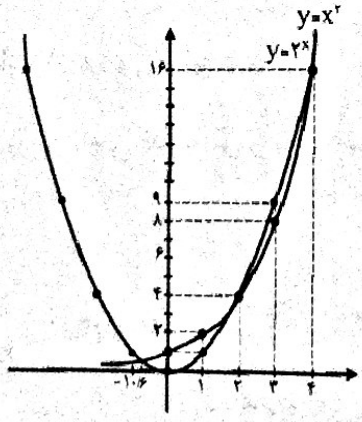
$4)\ |x-2|\le x$

x		۲	
$x-2$	−	۰	+

$$\begin{cases} x<2 \to -x+2\le x \to -2x\le -2 \to x\ge 1 \xrightarrow{x<2} \text{جواب}: 1\le x<2 \\ x\ge 2 \to x-2\le x \to -2\le 0 \checkmark \ \text{همواره درست} \to \text{جواب}: x\ge 2 \end{cases} \Rightarrow x\ge 1 \quad \text{جواب نهایی}$$

نامعادلات زیر را با روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را به‌دست آورید.

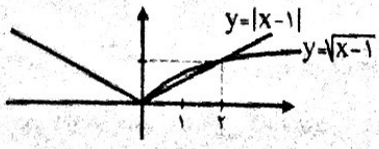
$5)\ x^2\le 3^x$



دو تابع $y=x^2 , y=3^x$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار دو تابع محدوده‌ای که مقادیر x^2 کم‌تر از مقادیر 3^x هستند بازه $(-0/6 , 2)$ یا $(4 , +\infty)$ می‌باشد.

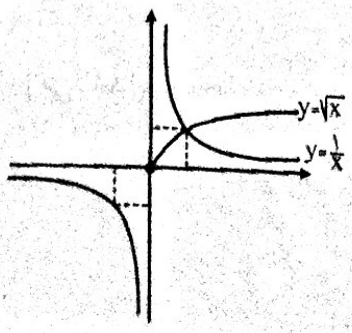
$6)\ \sqrt{x-1}<|x-1|$



دو تابع $y=\sqrt{x-1} , y=|x-1|$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار دو تابع محدوده‌ای که مقادیر $\sqrt{x-1}$ از مقادیر $|x-1|$ کم‌تر هستند بازه‌ی $(2 , +\infty)$ می‌باشد، پس مجموعه جواب نامعادله $x>2$ می‌باشد.

$7)\ \frac{1}{x}<\sqrt{x}$

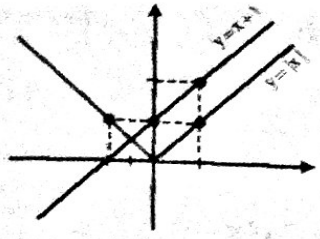


دو تابع $y=\sqrt{x} , y=\frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار دو تابع محدوده‌ای که مقادیر $\frac{1}{x}$ از مقادیر $\sqrt{x}$ کم‌تر هستند بازه $(1 , +\infty)$ می‌باشد. پس مجموعه جواب نامعادله $\{x \mid x\in IR , x>1\}$ می‌باشد.

نامعادلات زیر را با روش هندسی و جبری حل کنید.

۸) $x+1<|x|$



روش هندسی: دو تابع $y=|x|=y\backslash x+1$ را رسم می‌کنیم:
با توجه به نمودار دو تابع محدوده‌ای که مقادیر $x+1$ از مقادیر $|x|$ کم‌تر هستند بازه $(-\infty,-\frac{1}{2})$ می‌باشد. بنابراین مجموعه جواب نامعادله $\{x \mid x\in IR, x<\frac{-1}{2}\}$ می‌باشد.

روش جبری:

$x\geq 0 \rightarrow x+1<x \rightarrow 1<0$ غیرقابل قبول

$x<0 \rightarrow x+1<-x \rightarrow 2x<-1 \rightarrow x<\frac{-1}{2} \xrightarrow{\cap x<0} x<\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب : $\{x \mid x\in IR, x<-\frac{1}{2}\}$

۹) $|x^2-1|\leq|x+1| \xrightarrow[\text{را به توان ۲ می‌رسانیم.}]{\text{هر دو طرف نامنفی پس دو طرف}} (x^2-1)^2\leq(x+1)^2 \rightarrow (x^2-1)^2-(x+1)^2\leq 0$

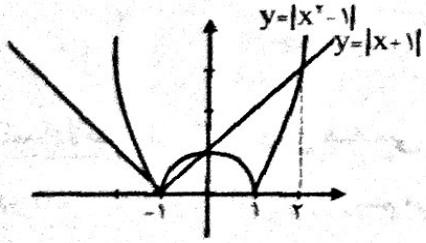
روش جبری:

$\rightarrow (x^2-1+x+1)(x^2-1-x-1)\leq 0 \rightarrow (x^2+x)(x^2-x-2)\leq 0$

$\rightarrow x(x+1)(x-2)(x+1)\leq 0 \rightarrow \underbrace{x(x+1)^2(x-2)}_{p(x)}\leq 0$

x		-1		0		2	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب : $\{x \mid x\in IR, 0\leq x\leq 2\}$



روش هندسی: با توجه به نمودار قسمتی که تابع $|x^2-1|$ زیر نمودار $|x+1|$ قرار دارد عبارتست از $\{x \mid x\in IR, 0\leq x\leq 2\}$

۱۰) $|x|+|x-1|\leq 5$

روش جبری: ابتدا عبارات داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

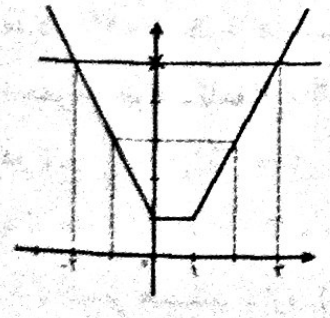
x		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$

$x<0 \rightarrow -x-x+1\leq 5 \rightarrow -2x\leq 4 \rightarrow x\geq -2 \xrightarrow{x<0}$ جواب: $-2\leq x<0$

$0\leq x<1 \rightarrow x-x+1\leq 5 \rightarrow 1\leq 5$ همواره درست $\rightarrow$ جواب: $0\leq x<1$

$x\geq 1 \rightarrow x+x-1\leq 5 \rightarrow 2x\leq 6 \rightarrow x\leq 3 \rightarrow$ جواب: $1\leq x\leq 3$

جواب نهایی $\Rightarrow -2\leq x\leq 3$



روش هندسی: دو تابع $y=5, y=|x|+|x-1|$ را رسم می‌کنیم:
با توجه به نمودارها محدوده‌ای که مقادیر $|x|+|x-1|$ از مقادیر ۵، کم‌تر یا مساوی هستند.
بازه‌ی $[-2,3]$ می‌باشد پس مجموعه جواب نامعادله $\{x \mid x\in IR, -2\leq x\leq 3\}$ می‌باشد.

فعالیت ۱ ـ صفحه ۴۵

۱ ـ جدول زیر را کامل کنید و نمودار توابع داده شده را رسم کنید.

تابع	$f(x)=x^2$	$g(x)=x^2$	$h(x)=4x+1$	$t(x)=x-2$	$s(x)=x-2$
دامنه	اعداد حقیقی مثبت	اعداد حقیقی منفی	R	R	[۲,۳]
برد	اعداد حقیقی مثبت	اعداد حقیقی مثبت	R	R	[۰,۱]

۲ ـ شباهت‌ها و تفاوت‌های این توابع را مشخص کنید.

تابع f و g ضابطه‌های یکسان اما دامنه‌های متفاوت دارند و بردهایشان نیز مساوی است.

توابع h و t با توجه به ضابطه‌هایشان دامنه و برد مساوی دارند.

تابع S در یک بازه تعریف شده و با جایگذاری نقاط بازه در تابع برد آن نیز به صورت یک بازه در می‌آید.

مسائل صفحه ۴۷

۱ ـ اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{p,q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟ ۱۶ تا

۲ ـ اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، چند تابع از A به B وجود دارد؟ n^m

۳ ـ تابعی مثال بزنید که دامنه آن $[-2,+\infty)$ باشد. $f(x)=\sqrt{x+2}$

۴ ـ دو تابع مانند f و g مثال بزنید که دامنه هر دو برابر [۲,۵] و برد هر دو [۰,۴] و f یک‌به‌یک باشد ولی g یک‌به‌یک نباشد.

$f(x)=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$ (راهنمایی: می‌توانید معادله خطی را بنویسید که از نقاط (۲,۵) و (۰,۴) می‌گذرد.)

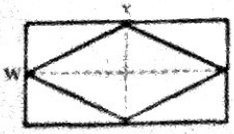
$g(x)=(x-4)^2$ (راهنمایی: می‌توانید در بازه‌های داده شده یک سهمی رسم کرده و معادله آن را بنویسید.)

۵ ـ در مستطیلی به عرض W و محیط ۴۰ متر یک لوزی محاط شده است. هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.

عرض = w

طول = x محیط مستطیل $=2(w+x) \rightarrow 40=2(x+w) \rightarrow x+w=20 \rightarrow x=20-w$

مساحت لوزی $=\frac{1}{2}$(حاصل‌ضرب دو قطر) $\rightarrow S(x)=\frac{1}{2}w(20-w) \rightarrow S(x)=10w-\frac{1}{2}w^2$



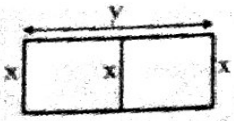
عرض مستطیل = قطر کوچک لوزی

طول مستطیل = قطر بزرگ لوزی

۶ ـ اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچک‌تر بیان کنید.

$y>x$ (عدد کوچک‌تر) $\rightarrow y-x=12 \rightarrow y=12+x \rightarrow x\times y=x(12+x) \rightarrow f(x)=12x+x^2$

۷ ـ با ۱۵۰ متر نرده یک زمین مستطیل شکل را محصور و از وسط با نرده مانند شکل آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. مساحت ناحیه محصور شده را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیابید.



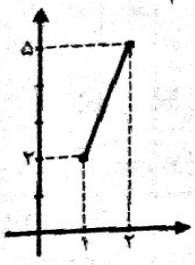
محیط $= ۳x+۲y=۱۵۰ \rightarrow ۲y=۱۵۰-۳x \rightarrow y=۷۵-\frac{۳}{۲}x$

مساحت مستطیل $= x\times y \rightarrow S(x)=x(۷۵-\frac{۳}{۲}x) \rightarrow S(x)=۷۵x-\frac{۳}{۲}x^۲$

۸ـ توابع زیر را رسم کنید.

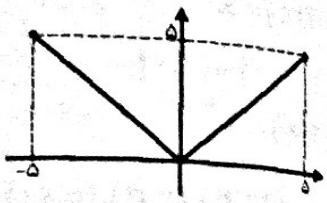
الف) $f:[۱,۲]\rightarrow R$
$f(x)=۳x-۱$

$x=۱ \rightarrow y=۳\times ۱-۱=۲$
$x=۲ \rightarrow y=۳\times ۲-۱=۵$



ب) $g:[-۵,۵]\rightarrow R$
$g(x)=|x|$

$x=-۵ \rightarrow y=|-۵|=۵$
$x=۵ \rightarrow y=|۵|=۵$



۹ـ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲۵ سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن (x) دست آورید.

مرحله‌ی اوّل:

مثلث $S=\frac{۱}{۲}ax \xrightarrow[s=۲۵]{} ۲۵=\frac{۱}{۲}ax \rightarrow a=\frac{۵۰}{x}$

مرحله‌ی دوم:

رابطه‌ی فیثاغورس: $c^۲=a^۲+x^۲ \rightarrow c^۲=(\frac{۵۰}{x})^۲+x^۲ \Rightarrow c(x)=\sqrt{(\frac{۵۰}{x})^۲+x^۲}$

۱۰ـ بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=۲۳۰+۲۰x-\frac{۱}{۲}x^۲$ را به دست آورید.

$$\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲۰}{۲(\frac{-۱}{۲})}=۲۰ \Rightarrow Max=F(\frac{-b}{۲a})=F(۲۰)=۲۳۰+۲۰\times ۲۰-(\frac{۱}{۲})(۲۰)^۲=۴۳۰$$

۱۱ـ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=|x|$ درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(۲x)=۲f(x)$

$f(x)=x^۲$

$$\begin{cases} f(۲x)=(۲x)^۲=۴x^۲ \\ ۲f(x)=۲x^۲ \end{cases} \Rightarrow f(۲x)\neq ۲f(x)$$ نادرست

ب) $g(۲x)=۲g(x)$

$$\begin{cases} g(x)=|x| \\ g(۲x)=|۲x|=۲|x| \\ ۲g(x)=۲|x| \end{cases} \rightarrow g(۲x)=۲g(x)$$ درست

ج) $f(x+۲)=f(x)+۲$

$$\begin{cases} f(x+۲)=(x+۲)^۲=x^۲+۴x+۴ \\ f(x)+۲=x^۲+۲ \end{cases} \rightarrow f(x+۲)\neq f(x)+۲$$ نادرست

د) $g(x+۲)=g(x)+۲$

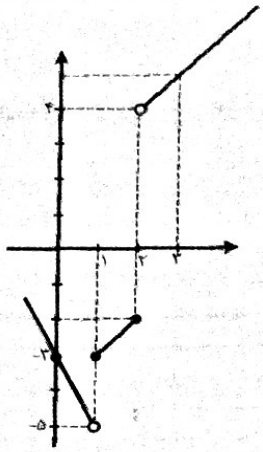
$$\begin{cases} g(x+۲)=|x+۲| \\ g(x)+۲=|x|+۲ \end{cases} \rightarrow |x+۲|\neq |x|+۲$$ نادرست

$$h(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<۱\\ x-۴ & ۱\le x\le ۲\\ x+۲ & ۲<x\end{cases}$$

x	۰	۱
y	-۳	-۵

x	۱	۲
y	-۳	-۲

x	۲	۳
y	۴	۵



دامنه $=R$

برد $=(-۵,+\infty)$

مسائل صفحه ۵۲

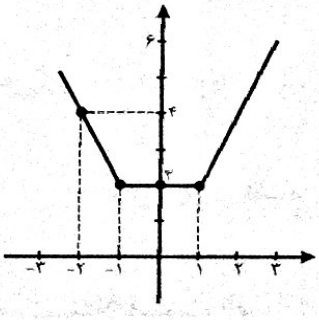
۱ـ تابع $f(x)=|x+۱|+|x-۱|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

$x<-۱ \rightarrow -(x+۱)-(x-۱)=-x-۱-x+۱=-۲x$

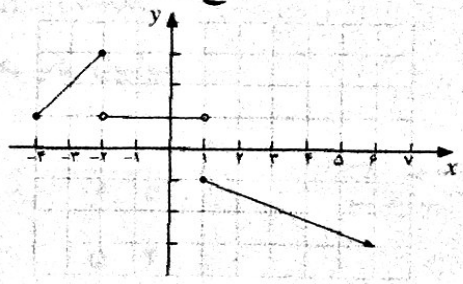
$-۱\le x<۱ \rightarrow (x+۱)-(x-۱)=x+۱-x+۱=۲$

$x\ge ۱ \rightarrow x+۱+x-۱=۲x$

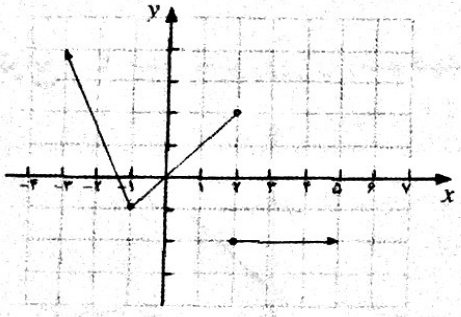
برد $=[۲,+\infty)$



۲ـ دامنه و برد هر یک از توابع چند ضابطه‌ای زیر را بیابید و ضابطه هر کدام را بنویسید.



(الف)



(ب)

معادله خطی که از نقاط $(-۴,۱)$ و $(-۲,۳)$ می‌گذرد
$$\begin{cases}m=\dfrac{۱-۳}{-۴+۲}=\dfrac{-۲}{-۲}=۱\\ y-۱=۱(x+۴)\rightarrow y=x+۵\end{cases}$$

معادله خطی که از نقاط $(۱,-۱)$ و $(۶,-۳)$ می‌گذرد
$$\begin{cases}m=\dfrac{-۱+۳}{۱-۶}=\dfrac{۲}{-۵}\\ y+۱=\dfrac{۲}{-۵}(x-۱)\rightarrow y=\dfrac{-۲}{۵}x-\dfrac{۳}{۵}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+۵ & -۴\le x\le -۲\\ ۱ & -۲<x<۱\\ \dfrac{-۲}{۵}x-\dfrac{۳}{۵} & x\ge ۱\end{cases}$$

دامنه $=[-۴,+\infty)$

برد $=(-\infty,-۱]\cup[۱,۳]$

ب) معادله خطی که از نقاط $(-1,-1)$ و $(3,4)$ می‌گذرد

$$m=\frac{-1-4}{-1+3}=\frac{-5}{2}\rightarrow y+1=\frac{-5}{2}(x+1)\rightarrow y=\frac{-5}{2}x-\frac{7}{2}$$

معادله خطی که از نقاط $(-1,-1)$ و $(2,2)$ می‌گذرد

$$m=\frac{-1-2}{-1-2}=1\rightarrow y+1=1(x+1)\rightarrow y=x$$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{5}{2}x-\frac{7}{2} & x\le -1\\ x & -1<x<2\\ -2 & x\ge 2\end{cases}$$

دامنه $=R$

برد $=[-1,+\infty)\cup\{-2\}$

۳ـ اگر $f(x)=\begin{cases}-5x-8 & x<-2\\ \frac{1}{2}x+5 & -2\le x\le 4\\ 10-2x & 4<x\end{cases}$ مقدارهای $f(6)$ و $f(4)$ و $f(-4)$ و $f(0)$ را حساب کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

$f(6)=10-2\times 6=-2$

$f(4)=\frac{1}{2}\times 4+5=7$

$f(-4)=-5(-4)-8=12$

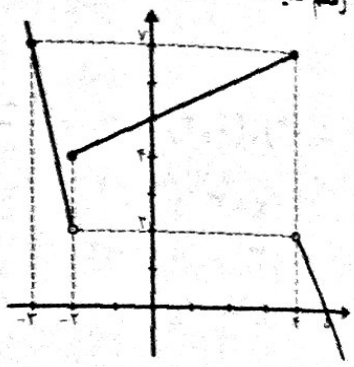
$f(0)=\frac{1}{2}\times 0+5=5$

$$f(x)=\begin{cases}-5x-8 & x<-2\\ \frac{1}{2}x+5 & -2\le x\le 4\\ 10-2x & x>4\end{cases}$$

	-۳	-۲
y	۷	۲

x	-۲	
y	۴	۷

x	۴	۵
y	۲	۰



۴ـ تابعی چند ضابطه‌ای مانند f بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند، سپس نمودار f را رسم کنید.

الف) دامنه $f=[-3,5]$ و برد $f=[-2,7]$ ب) $f(0)=3$ ج) f یک‌به‌یک نباشد.

(راهنمایی: ابتدا می‌توانید در بازه‌های داده شده نموداری چند تکه‌ای بکشید که یک‌به‌یک نباشد و سپس معادله خطوط رسم شده را به دست آورید.)

معادله‌ی خط شامل نقاط $(-3,-2)$ و $(0,7)$ $\quad y-7=\frac{7+2}{0+3}(x-0)\rightarrow y=3x+7$

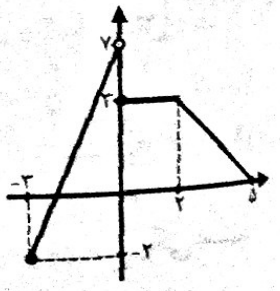
معادله‌ی خط شامل نقاط $(2,3)$ و $(5,0)$ $\quad y-0=\frac{0-3}{5-2}(x-5)\rightarrow y=-x+5$

$$f(x)=\begin{cases}3x+7 & -3\le x<0\\ 3 & 0\le x<2\\ -x+5 & 2\le x\le 5\end{cases}$$

یا

$0\le x\le 2$

$2<x\le 5$



۵ـ کدام‌یک از معادلات زیر y را به‌صورت تابعی از x مشخص می‌کند.

الف) $x^2+y^2=25\rightarrow y^2=25-x^2\rightarrow y=\pm\sqrt{25-x^2}$ تابع نیست.

ب) $y=\begin{cases}x+3 & x\le 0\\ x-1 & x>0\end{cases}$ تابع هست چون به ازای هر x فقط یک y موجود است.

ج) $y=|x|+1$ تابع هست چون به ازای هر x فقط یک y موجود است.

د) $x=|y|+1 \rightarrow |y|=x-1 \rightarrow y=\pm(x-1)$

تابع نیست.

هـ) $y^2=x^2 \rightarrow y=\pm x$

تابع نیست.

و) $3x+2y=12 \rightarrow 2y=12-3x \rightarrow y=6-\frac{3}{2}x$

تابع هست.

ز) $x=1$

تابع نیست چون (۱،۲) و (۱،۳) مختصص های اولشان برابرند.

یا به بیان دیگر به ازای مؤلفه‌های اول برابر دو مقدار y یافت شد.

۶ـ تابع f با مشخصات زیر داده شده است.

الف) $f(3)=3$ و $f(-5)=-2$

ب) دامنه f برابر همه اعداد حقیقی است.

ج) تابع f در بازه $[0,2]$ ثابت است.

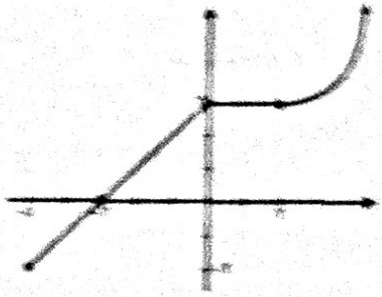
د) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

هـ) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور xها را در نقطه ۳- قطع می‌کند.

تابع f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

بردار را با استفاده از مشخصات داده شده رسم می‌کنیم.

$$(-5,-2),(0,3) \Rightarrow m=\frac{3+2}{0+5}=\frac{5}{5}=1 \rightarrow \begin{array}{l} y+2=1(x+5) \\ y=x+5-2=x+3 \end{array}$$



$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x<0 \\ 3 & 0\le x\le 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$$

۷ـ کدام یک از زوج توابع داده شده با هم مساویند؟

الف) $f(x)=\sin x \quad , \quad g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$

$f=g$ چون یک رابطه است که قبلاً ثابت شده

ب) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3 \\ 5 & x=3 \end{cases} \quad , \quad g(x)=x+3$

$f\neq g$ چون $f(3)\neq g(3)$

ج) $f(x)=\begin{cases} x & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$

$f=g$ چون دامنه و مقادیرشان برابرند.

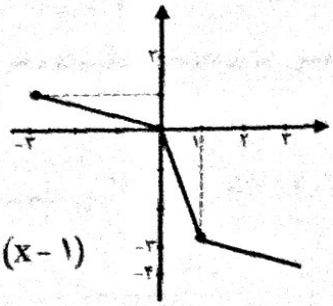
د) $f(x)=\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad g(x)=\sqrt{1+x^2}-1$

$f=g$ چون دامنه و مقادیرشان برابرند. در این مورد بهتر است مشخص شود که دامنه هر دو تابع یکی است.

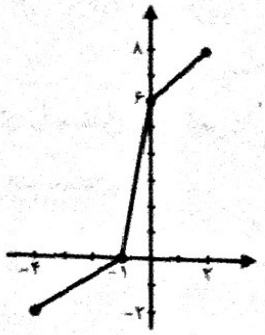
$D_f \rightarrow 1+x^2>0 \rightarrow$ همواره برقرار است $\rightarrow D_f=R=D_g$

$$f(x)=\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}}=\frac{x^2(1-\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)}=\sqrt{1+x^2}-1=g(x)$$

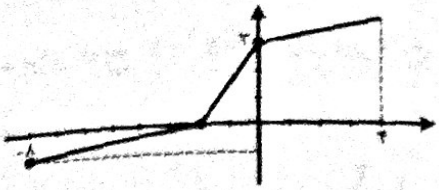
نمودار توابع داده شده را رسم کنید.



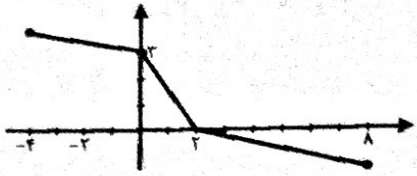
$y=-f(x-1)$



$y=f(2x)$



$y=f(\frac{1}{2}x)$



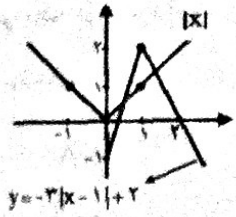
$y=f(-\frac{1}{2}x)$

مسائل صفحه ۶۳

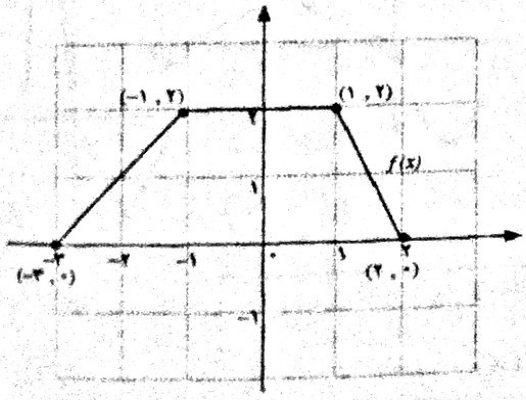
۱ ـ ابتدا نمودار $f(x)=|x|$ را رسم کنید و به کمک آن نمودار $y=-3|x-1|+2$ را رسم کنید.

$y=|x| \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y=|x-1| \xrightarrow[\text{منبسط می‌شود}]{\text{نسبت به محور yها}} y=3|x-1|$

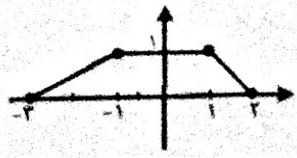
$y=-3|x-1|+2 \xrightarrow[\text{به بالا منتقل می‌شود}]{\text{دوواحددرراستای محور yها}} y=-3|x-1| \xrightarrow[\text{قرینه می‌شود}]{\text{نسبت به محور xها}}$



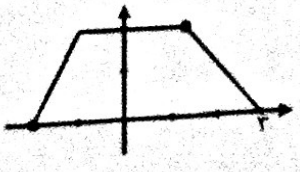
۲ ـ نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر داده شده است. به کمک این نمودار، نمودار تابع داده شده را رسم کنید.



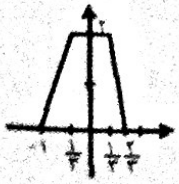
الف) $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$



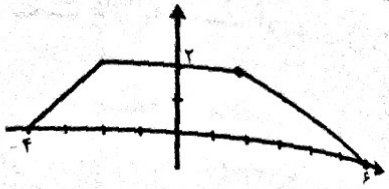
ب) $g(x)=f(-x)$



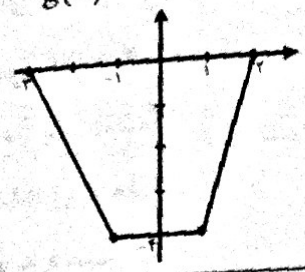
ج) $g(x)=f(3x)$



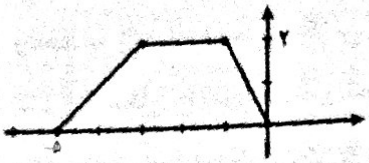
ی) $g(x)=f(-\frac{1}{2}x)$



ه) $g(x)=-2f(x)$



و) $g(x)=f(x+2)$



توجه:

اگر $a>1$: برای رسم نمودار $f(ax)$ ← x نقاط $f(x)$ در $\frac{1}{a}$ ضرب می‌شوند.

اگر $a>1$: برای رسم نمودار $f(\frac{1}{a}x)$ ← x نقاط $f(x)$ در a ضرب می‌شوند.

اگر $a>1$: برای رسم نمودار $af(x)$ ← y نقاط $f(x)$ در a ضرب می‌شوند.

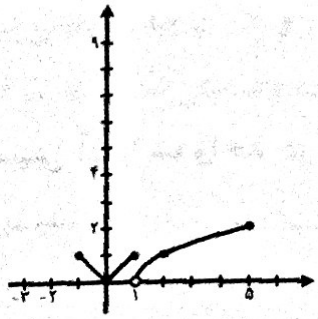
اگر $a>1$: برای رسم نمودار $\frac{1}{a}f(x)$ ← y نقاط $f(x)$ در $\frac{1}{a}$ ضرب می‌شوند.

۳ـ نمودار تابع زیر را

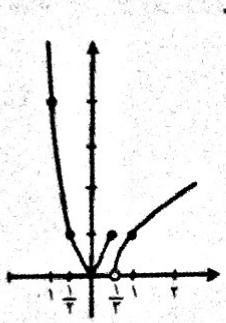
$$f(x)=\begin{cases}|x| & -1\le x\le 1\\ \sqrt{x-1} & x>1\end{cases}$$

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱

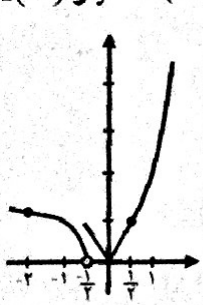
x	۱	۲	۵
y	۰	۱	۲



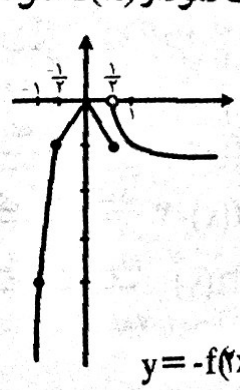
به کمک نمودار $f(x)$ نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(-2x)$ و $y=-f(2x)$ را رسم کنید.



$y=f(2x)$



$y=f(-2x)$



$y=-f(2x)$

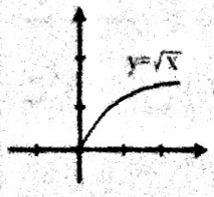
۴ـ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

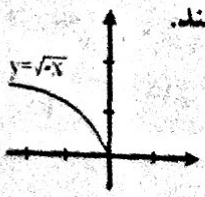
الف) **اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=|x+3|-3$، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست و سپس انتقال سه واحد به پایین به دست آورد.**

نادرست. سه واحد سمت چپ (نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت چپ و سپس انتقال سه واحد به پایین به‌دست آورد.)

ب) **$f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ دارای نمودارهای یکسانی هستند.**

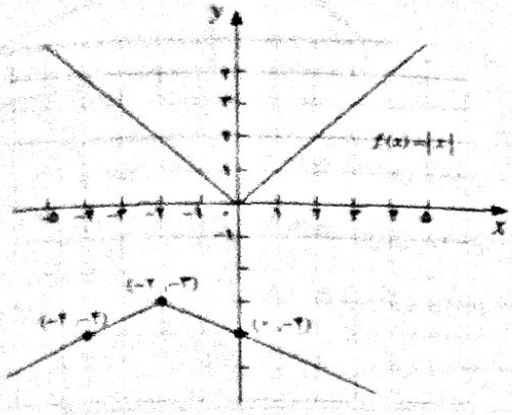
نادرست. دامنه هایش متفاوت است. (در این مورد مثلاً نمودار را رسم کنیم. نمودار $g(x)$ قرینه نمودار $f(x)$ نسبت به محور yهاست.)





ج) اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=-(x-2)^2+4$ آن‌گاه نمودار g را می‌توان از نمودار f با یک تغییر مکان به میزان دو واحد به راست، سپس انعکاس نسبت به محور xها و ۴ واحد تغییر مکان به سمت بالا به دست آورد. درست

۵ ـ در شکل روبه‌رو نمودار توابع g و f در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. اگر g از طریق تعدادی عملیات (انبساط و انقباض و انتقال و قرینه) روی f به دست آمده باشد معادله‌ای برای g بیابید.



نمودار f(x) ابتدا نسبت به محور xها منعکس شده و سپس در امتداد محور yها با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض شده است و بعد ۲ واحد به سمت منفی محور xها رفته و نهایتاً سه واحد در امتداد محور yها به سمت پایین می‌آید و نمودار g(x) حاصل می‌شود.

$y=-\frac{1}{2}|x+2|-3$

۶ ـ نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها، انعکاس داده‌ایم، سپس آن را سه واحد در جهت راست و بعد ۵ واحد به پایین حرکت داده‌ایم. ضابطه تابع به دست آمده را بنویسید.

$y=\sqrt{-x-3}-5$

۷ ـ نقطه (۶,۸-) را روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. در توابع زیر این نقطه به چه نقطه‌ای متناظر می‌شود؟

الف) $g(x)=\frac{1}{3}f(x) \xrightarrow{\text{مقدار y در } \frac{1}{3} \text{ ضرب می‌شود}} (-8,3)$

ب) $g(x)=f(-x) \xrightarrow{\text{مقدار x قرینه می‌شود}} (8,6)$

ج) $g(x)=f(x)-3 \xrightarrow{\text{مقدار y منهای ۳ می‌شود.}} (-8,3)$

د) $g(x)=3f(x) \xrightarrow{\text{مقدار y در ۳ ضرب می‌شود.}} (-8,18)$

۸ ـ در هر مورد توضیح دهید که نمودار g چگونه از نمودار f به دست می‌آید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x-1}+3$

ابتدا نسبت به محور xها منعکس شده سپس با ضریب $\frac{1}{2}$ در امتداد محور yها منقبض می‌شود و بعد یک واحد به سمت راست رفته و ۳ واحد به طرف بالا می‌رود. (نمودار رادیکالی است.)

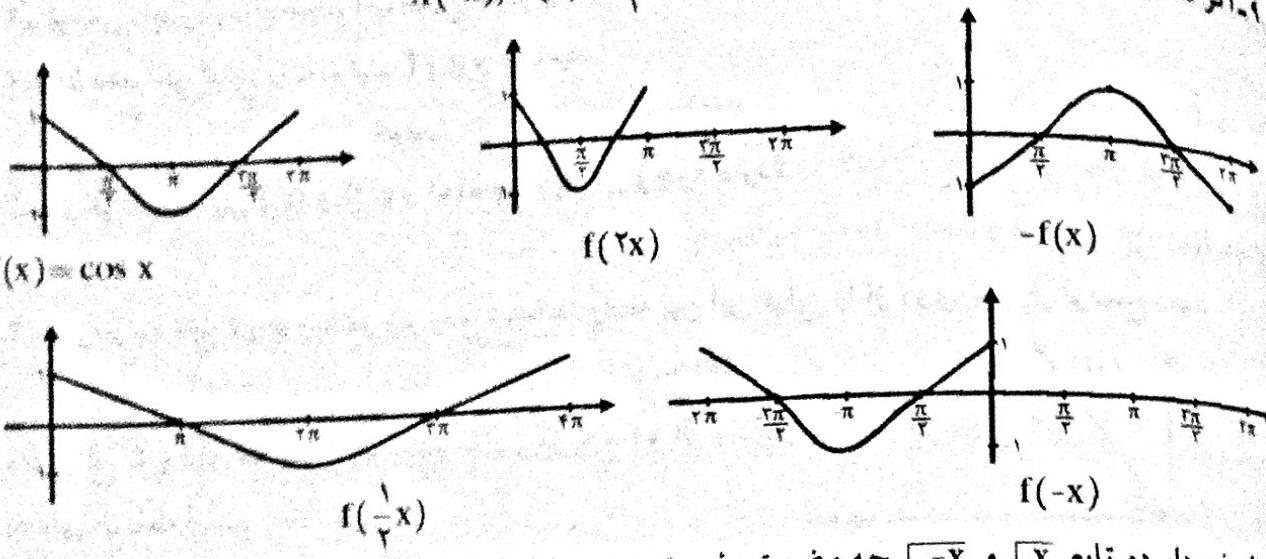
ب) $f(x)=x^2$ و $g(x)=-2(x+4)^2-3$

سهمی ابتدا نسبت به محور xها منعکس شده بعد در امتداد محور yها با ضریب ۲ منبسط شده سپس ۴ واحد به سمت منفی (چپ) محور xها رفته و ۳ واحد نسبت به yها پایین می‌آید.

ج) $f(x)=|x|$ و $g(x)=-2\left|x-\frac{1}{3}\right|+1$

ابتدا نمودار قدر مطلق نسبت به محور xها منعکس شده بعد در ابتدا محور yها با ضریب ۲ منبسط شده و سپس به اندازه $\frac{1}{3}$ واحد به سمت راست و یک واحد بالا می‌رود.

۹ـ اگر $f(x)=\cos x$ مطلوبست نمودار، $f(-x), -f(x), f(\frac{1}{2}x), f(2x)$.



۱۰ـ نمودار دو تابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دامنه این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ برد این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ جواب به این سؤالات در مورد دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ چه خواهد بود؟

نمودار $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ نسبت به محور yها قرینه‌اند. دامنه‌های $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ نیز نسبت به هم قرینه‌اند. برد هر دو R^+ است.

$D_{(\sqrt{x})}: x \geq 0$ یا $D=[0,+\infty)$

$D_{(\sqrt{-x})}: -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \qquad D=(-\infty,0]$

نمودار $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به محور yها قرینه‌اند.
دامنه‌های $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به هم قرینه‌اند.
برد دو تابع یکسان است.

۱۱ـ اگر $a<0$، نمودار تابع $f(ax)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه ساخته می‌شود؟ اگر $a<0$ نمودار $f(x)$ ابتدا نسبت به محور yها قرینه شده و سپس به اندازه $|a|$ منبسط یا منقبض می‌شود در امتداد محور yها.

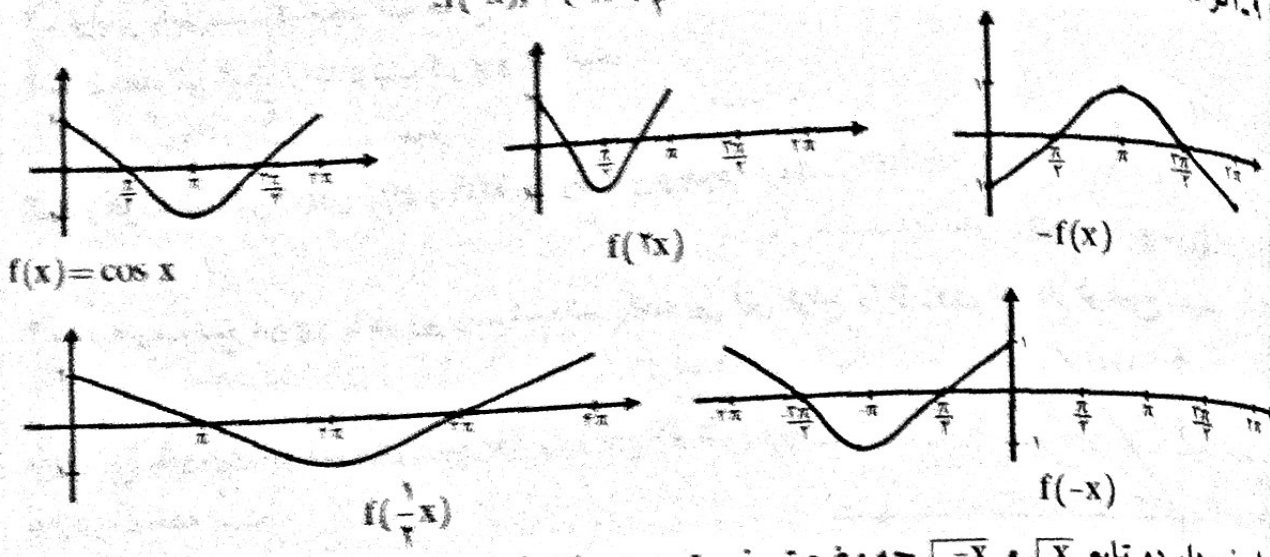
فعالیت ۶ـ صفحه ۶۵

ی حوض آب با...

ـ جدول زیر را که حجم آب موجود در حوض و آب‌های خارج شده از دو شیر را در برخی لحظات نشان می‌دهد تکمیل کنید. زمان بر حسب ثانیه و حجم بر حسب لیتر است.

t	$\frac{1}{2}$	۲	۳	$\frac{7}{2}$	۴	۵
حجم آب خارج شده از شیر اول	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	۲	$\frac{5}{2}$
حجم آب خارج شده از شیر دوم	$\frac{1}{2}$	۲	۳	$\frac{7}{2}$	۴	۵
حجم آب موجود در حوض	$\frac{3}{4}$	۳	$\frac{9}{2}$	$\frac{21}{4}$	۶	$\frac{15}{2}$

۹ـ اگر $f(x)=\cos x$ مطلوبست نمودار، $f(2x), f(\frac{1}{2}x), -f(x), f(-x)$.



۱۰ـ نمودار دو تابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دامنه این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ برد این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ جواب به این سؤالات در مورد دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ چه خواهد بود؟

نمودار $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ نسبت به محور yها قرینه‌اند. دامنه‌های $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ نیز نسبت به هم قرینه‌اند. برد هر دو R^+ است.

$D_{(\sqrt{x})}: x \geq 0$ یا $D=[0,+\infty)$

$D_{(\sqrt{-x})}: -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \qquad D=(-\infty,0]$

نمودار $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به محور yها قرینه‌اند.

دامنه‌های $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به هم قرینه‌اند.

برد دو تابع یکسان است.

۱۱ـ اگر $a<0$، نمودار تابع $f(ax)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه ساخته می‌شود؟ اگر $a<0$ نمودار $f(x)$ ابتدا نسبت به محور yها قرینه شده و سپس به اندازه $|a|$ منبسط یا منقبض می‌شود در امتداد محور yها.

فعالیت ۶ـ صفحه ۶۵

حوض آب با...

جدول زیر را که حجم آب موجود در حوض و آب‌های خارج شده از دو شیر را در برخی لحظات نشان دهد تکمیل کنید. زمان بر حسب ثانیه و حجم بر حسب لیتر است.

t	$\frac{1}{2}$	۲	۳	$\frac{7}{2}$	۴	۵
حجم آب خارج شده از شیر اول	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	۲	$\frac{5}{2}$
حجم آب خارج شده از شیر دوم	$\frac{1}{2}$	۲	۳	$\frac{7}{2}$	۴	۵
حجم آب موجود در حوض	$\frac{3}{4}$	۳	$\frac{9}{2}$	$\frac{21}{4}$	۶	$\frac{15}{2}$

۲ـ اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{7-x^2}$ ، gof و دامنه‌ی آن را حساب کنید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{7-(x^2)^2}=\sqrt{7-x^4}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in R \mid x^2\in[-\sqrt{7},\sqrt{7}]\}=[0,\sqrt[4]{7}]$$

$$x^2\in[-\sqrt{7},\sqrt{7}]\Rightarrow -\sqrt{7}\le x^2\le\sqrt{7} \quad \xRightarrow{x^2\ge 0} \quad 0\le x^2\le\sqrt{7}\Rightarrow 0\le x\le\sqrt[4]{7}$$

مسائل صفحه ۷۳

۱ـ اگر $f(x)=\frac{5x}{3x-7}$ و $g(x)=\frac{x^5-1}{5x-15}$، تابع $(\frac{f}{g})(x)$ و دامنه آن را بیابید.

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\frac{5x}{3x-7}}{\frac{x^4-1}{5x-15}}=\frac{25x(x-3)}{(3x-7)(x^5-1)}$$

$$D_f=R-\{\frac{7}{3}\} \quad , \quad D_g=R-\{3\} \quad , \quad g(x)=0\Rightarrow x^5-1=0\Rightarrow x^5=1\Rightarrow x=1$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\} \qquad D_{\frac{f}{g}}=R-\{3,\frac{7}{3},+1\}$$

۲ـ در هر یک از موارد زیر دامنه توابع زیر و ضابطه آن‌ها را به دست آورید.

$$fg \quad , \quad ff \quad , \quad \frac{g}{f}$$

الف) $f(x)=4x$ و $g(x)=2-x$

$$(fg)(x)=4x(2-x)=8x-4x^2$$

$$(ff)(x)=(4x)(4x)=16x^2 \qquad D_{ff}=D_f=R$$

$$(\frac{g}{f})(x)=\frac{2-x}{4x} \qquad D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x \mid f=0\}=R-\{0\}$$

ب) $f(x)=\frac{4}{x-2}$ و $g(x)=\frac{1}{6-x}$

$$f-g=\frac{4}{x-2}-\frac{1}{6-x} \qquad D_{f-g}=D_{fg}=D_f\cap D_g=R-\{2,6\}$$

$$fg=\frac{4}{x-2}-\frac{1}{6-x} \qquad D_{ff}=D_f=R-\{2\}$$

$$ff=(\frac{4}{x-2})^2$$

$$\frac{f}{g}=\frac{\frac{4}{x-2}}{\frac{1}{6-x}}=\frac{4(6-x)}{x-2} \qquad D_{\frac{f}{g}}=R-\{2,6\}$$

$$\frac{g}{f}=\frac{\frac{1}{6-x}}{\frac{4}{x-2}}=\frac{x-2}{4(6-x)} \qquad D_{\frac{g}{f}}=R-\{2,6\}$$

ج) $f(x)=\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=\sqrt{x+۲}$

$D_{f-g}=D_{fg}=D_f\cap D_g=[۲,+\infty)\cap[-۲,+\infty)=[۲,+\infty)$

$f-g=\sqrt{x-۲}-\sqrt{x+۲}$

$fg=\sqrt{x-۲}\times\sqrt{x+۲}=\sqrt{x^۲-۴}$

$ff=\sqrt{x-۲}\times\sqrt{x-۲}=|x-۲|$ $\qquad D_{ff}=[۲,+\infty)$

$\frac{f}{g}=\frac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x+۲}}=\sqrt{\frac{x-۲}{x+۲}}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}}=[۲,+\infty)$

$\frac{g}{f}=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x-۲}}=\sqrt{\frac{x+۲}{x-۲}}$ $\qquad D_{\frac{g}{f}}=(۲,+\infty)$

د) $f(x)=\sqrt{x+۳}$ و $g(x)=\frac{۲}{x}$

$\frac{f}{g}=\frac{\sqrt{x+۳}}{\frac{۲}{x}}=\frac{x\sqrt{x+۳}}{۲}$

$f-g=\sqrt{x+۳}-\frac{۲}{x}$

$fg=\sqrt{x+۳}\left(\frac{۲}{x}\right)$ $\qquad \frac{g}{f}=\frac{\frac{۲}{x}}{\sqrt{x+۳}}=\frac{۲}{x\sqrt{x+۳}}$

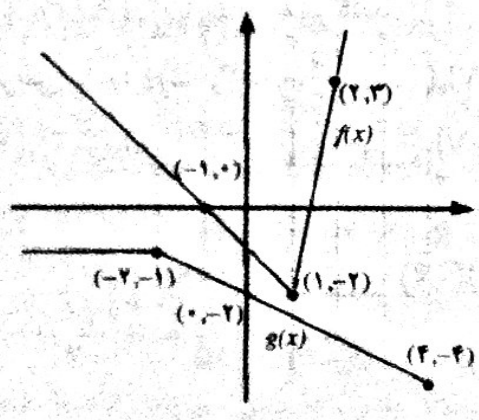
$ff=(\sqrt{x+۳})^۲=|x+۳|$

$D_f=[-۳,+\infty)$ $\qquad D_{f-g}=D_{fg}=[-۳,۰)\cup(۰,+\infty)$

$D_g=R-\{۰\}$ $\qquad D_{ff}=[-۳,+\infty)$

$D_{\frac{f}{g}}=[-۳,+\infty)-\{۰\}$ $\qquad D_{\frac{g}{f}}=(-۳,+\infty)-\{۰\}$

۲ـ با استفاده از نمودارهای f ، g که در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند، عبارات داده شده را (در صورت امکان) محاسبه کنید.



الف) $(f+g)(-۴)=f(-۴)+g(-۴)=\frac{۷}{۲}+\frac{-۲}{۳}=\frac{۱۷}{۶}$

ب) $(f-g)(۳)=f(۳)-g(۳)=۷+(-۴)=۳$

ج) $\left(\frac{f}{g}\right)(۰)=\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$

د) $(fg)\left(\frac{۱}{۳}\right)=f\left(\frac{۱}{۳}\right)\times g\left(\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۴}{۳}+\frac{۷}{۳}=\frac{۱۱}{۳}$

هـ) $(fog)\left(-\frac{۱}{۲}\right)=f\left(g\left(\frac{-۱}{۲}\right)\right)=f(-۲)=۱$

$(fof)(۷)=f(f(۷))$ $\rightarrow$ باتوجه به شکل امکان ندارد.

راهنمایی: معادله خط $f(x)$ برای $x\le ۱$ عبارتست از $f(x)=-x-۱$ و معادله خط $g(x)$ برای $-۲\le x\le ۱$ عبارتست از $g(x)=-\frac{۱}{۲}x-۲$

۴ـ فرض کنیم $f: IN \to IN$ تابعی با ضابطه $g(n)=۲n$ باشد. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و تابع $f:A\to N$ به صورت $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ تعریف شود، توابع $۲f+g$ ، gof رامحاسبه کنید.

$g(n)=\{(۱,۲)\ (۲,۴)\ (۳,۶)\ (۴,۸)\ ,\ (۵,۱۰),...\}$

$f(n)=\{(۱,۲)\ (۲,۳)\ (۳,۵)\ (۴,۷)\}$

$(۲f+g)(n)=\{(۱,۶)\ (۲,۱۰)\ (۳,۱۶)\ (۴,۲۲)\}$

نمونه: $۲f(۱)+g(۱)=۲\times۲+۲=۶ \to (۱,۶)$

$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(۲)=۴$ $\qquad$ $(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۶$

$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۵)=۱۰$ $\qquad$ $(gof)(۴)=g(f(۴))=g(۷)=۱۴$

$gof=\{(۱,۴)\ (۲,۶)\ (۳,۱۰)\ (۴,۱۴)\}$

۵ـ دو تابع $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x(۱-x)}$ مفروضند. دامنه تابع fog را بدون محاسبه $(fog)(x)$ به دست آورید.

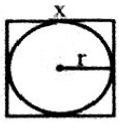
$D_f=R-\{\pm۱\}$ $\quad$ $Dg=x(۱-x)\geq ۰ \to \begin{cases}x=۰\\x=۱\end{cases}$

x		۰		۱	
g	−	۰	+	۰	−

$D_g=[۰,۱], R_g=[۰,+\infty)$

چون برد g زیرمجموعه‌ای از دامنه f است پس D_{fog} همان دامنه g است. $D_{fog}=[۰,۱]$

۶ـ یک پی (فونداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازوئیل استوانه‌ای استفاده می‌شود. (شکل مقابل)



الف) شعاع مخزن، r را به عنوان تابعی از x (ضلع مربع) بنویسید. $r(x)=\frac{x}{۲}$

ب) مساحت A پایه دایره‌ای شکل را به عنوان تابعی از r بنویسید. مساحت پایه دایره‌ای شکل: $A=\pi r^۲$

ج) $(Aor)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید. $(Aor)(x)=A(r(x))=\pi(\frac{x}{۲})^۲=\pi\frac{x^۲}{۴}$

۷ـ فرض کنیم: $f=\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\}$ و $g=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$ ، توابع زیر را حساب کنید.

$$f+g\ ,\ f-g\ ,\ fg\ ,\ \frac{f}{g}$$

$(f+g)(-۴)=۱۳+(-۷)=۶$

$(f+g)(۰)=۵+(-۳)=۲$

$(f+g)(۳)=-۵+۰=-۵$

$(f-g)(-۴)=۱۳-(-۷)=۲۰$

$(f-g)(۰)=۵-(-۳)=۸$

$(f-g)(۳)=-۵-۰=-۵$

$f+g=\{(-۴,۶)(۰,۲)\ (۳,-۵)\}$

$(fg)(-۴)=۱۳(-۷)=-۹۱$

$(fg)(۰)=۵(-۳)=-۱۵$

$(fg)(۳)=-۵(۰)=۰$

$\frac{f}{g}(-۴)=\frac{۱۳}{-۷}$

$\frac{f}{g}(۰)=\frac{۵}{-۳}$

$(\frac{f}{g})(۳)=\frac{-۵}{۰}$ تعریف نشده

$f-g=\{(-۴,۲۰)\ (۰,۸)\ (۳,-۵)\}$

$fg=\{(-۴,-۹۱)\ (۰,-۱۵)\ (۳,۰)\}$ $\qquad \frac{f}{g}=\{(-۴,\frac{۱۳}{-۷})\ (۰,\frac{۵}{-۳})\}$

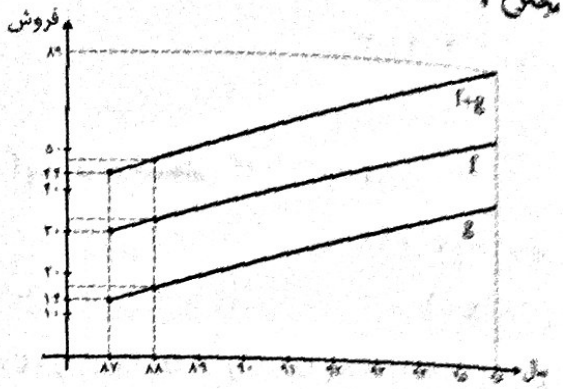
۸- یک رمان پر فروش درباره دفاع مقدس در سال ۱۳۸۶، ۲۷ میلیون تومان فروش کرد. رمان دیگری درباره دفاع مقدس در همین سال ۱۲ میلیون تومان فروش کرد. اگر رمان اول در هر سال به میزان ۳ میلیون تومان نسبت به سال قبل افزایش فروش داشته باشد، تابعی بنویسید که میزان فروش در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ را بر حسب زمان نشان دهد. اگر افزایش فروش برای رمان دوم در هر سال ۲ میلیون تومان نسبت به سال قبل باشد، تابعی بنویسید که مجموع فروش این دو رمان را در هر سال از سال ۱۳۸۶ نشان دهد. این دو رمان در سال ۱۳۹۶ در مجموع چه میزان فروش خواهند کرد؟ هر سه تابع مرتبط را در نموداری رسم کنید.

$f(x)=۲۷+۳x$

$g(x)=۱۲+۲x$

$k(x)=f(x)+g(x)=۲۷+۳x+۱۲+۲x=۳۹+۵x$

$k(۱۰)=۳۹+۵\times۱۰=۸۹$ میلیون تومان $(۹۶-۸۶=۱۰)$



۹- اگر $f(x)=x^۲+۲x+۲$ تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که $(fog)(x)=x^۲-۴x+۵$

$f(x)=x^۲+۲x+۲$

$f(g)=g^۲+۲g+۲$

$f(g)=x^۲-۴x+۵$ $\Rightarrow g^۲+۲g+۲=x^۲-۴x+۵$

$g^۲+۲g-(x^۲-۴x+۳)=۰ \rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۴+۴x^۲-۱۶x+۱۲$

$\Delta=(۲x-۴)^۲ \rightarrow g=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲\pm(۲x-۴)}{۲}$

$g=\frac{-۲+۲x-۴}{۲}=\frac{-۶+۲x}{۲}=x-۳$

$g=\frac{-۲-۲x+۴}{۲}=\frac{۲-۲x}{۲}=۱-x$

۱۰- توابع f ، g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه، دامنه تعریف $(f+g)of$ را به دست آورید.

$D_f:\ ۱-x^۲\geq۰ \rightarrow x=\pm۱ \rightarrow$

x		-۱		۱	
f	-	۰	+	۰	-

$\rightarrow D_f=[-۱,۱]$

$D_g=[۰,+\infty) \rightarrow D_{f+g}=D_f\cap D_g=[۰,۱]$

$D_{(f+g)of}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_{f+g}\}=\{x\in[-۱,۱] \mid \sqrt{۱-x^۲}\in[۰,۱]\}=[۰,۱]$

$۰\leq\sqrt{۱-x^۲}\leq۱ \Rightarrow ۰\leq۱-x^۲\leq۱ \Rightarrow ۰\leq x^۲\leq۱ \Rightarrow ۰\leq x\leq۱$

۱۱ـ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ آن‌گاه $(fog)(5)=-25$ ، $(fog)(x)=-x^2$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x^2-4})=(\sqrt{x^2-4})^2-4=x^2-4-4=x^2-8 \Rightarrow fog(5)=25-8=17$ نادرست

ب) اگر $g(4)=7$ و $f(7)=5$ آن‌گاه $(fog)(4)=35$ $\quad (fog)(4)=f(g(4))=f(7)=5$ نادرست

ج) اگر $g(x)=2x-1$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آن‌گاه $(fog)(5)=g(2)$

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(5)=f(g(5))=f(9)=\sqrt{9}=3\\ g(5)=2\times5-1=9\\ g(2)=2\times2-1=3\end{array}\right\}\Rightarrow (fog)(5)=g(2) \quad \text{درست}$$

د) برای هر دو تابع g و f داریم: $fog=gof$ نادرست

۱۲ـ اگر $h(x)=4x^2+4x+7$ و $g(x)=2x+1$ ، تابعی مانند f بیابید به قسمتی که $fog=h$.

$fog(x)=4x^2+4x+7$ $\qquad f(x)=ax^2+bx+c$

$g(x)=2x+1$ $\qquad f(g)=ag^2+bg+c \rightarrow$

$f(g)=f(2x+1)=a(2x+1)^2+b(2x+1)+c=4ax^2+4ax+a+2bx+b+c=$

$=4ax^2+(4a+2b)x+a+b+c$

$f(g)=fog=4x^2+4x+7$ $\Rightarrow 4x^2+4x+7=4ax^2+(4a+2b)x+a+b+c$

$$\begin{cases}4a=4 \rightarrow a=1\\ 4a+2b=4 \Rightarrow 2b=0 \rightarrow b=0\\ a+b+c=7 \Rightarrow 1+0+c=7 \rightarrow c=6\end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2+6$$

نکته: هر گاه در دو طرف یک تساوی تعداد جملات و درجه‌های آن‌ها با هم مساوی باشند طبق اصل هم ارزی ضرایب جملات با درجه مساوی با هم مساویند.

۱۳ـ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ ، توابع gof و fog و دامنه آن‌ها را به دست آورید.

$gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x^2+5}=\sqrt{4-(\sqrt{x^2+5})^2}=\sqrt{4-x^2-5}=\sqrt{-x^2-1}$

زیر رادیکال منفی شده پس این ترکیب غیر ممکن است. $D_{gof}=\phi$

$fog(x)=f(g)=f(\sqrt{4-x^2})=\sqrt{(\sqrt{4-x^2})^2+5}=\sqrt{4-x^2+5}=\sqrt{9-x^2}$

چون برد g زیرمجموعه‌ای از دامنه f می‌باشد پس: $D_{fog}=D_g=[-2,2]$

۱۴ـ جدول زیر را در نظر بگیرید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
f(x)	۳	۱	۴	۲	۲	۵
g(x)	۶	۳	۲	۱	۲	۳

مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $f(g(۱))=f(۶)=۵$ ب) $g(f(۱))=g(۳)=۲$ ج) $f(f(۱))=f(۳)=۴$

د) $g(g(۱))=g(۶)=۳$ هـ) $g(f(۳))=g(۴)=۱$ و) $f(g(۶))=f(۳)=۴$

۱۵ـ اگر $f=\{(۴,۵),(۶,۵),(۸,۱۲),(۱۰,۲)\}$ و $g=\{(۴,۶),(۲,۴),(۶,۸),(۸,۱۰)\}$ توابع gof و fog را حساب کنید.

$fog(۴)=f(g(۴))=f(۶)=۵ \rightarrow (۴,۵)$

$fog(۲)=f(g(۲))=f(۴)=۵ \rightarrow (۲,۵)$

$fog(۶)=f(g(۶))=f(۸)=۱۲ \rightarrow (۶,۱۲)$

$fog(۸)=f(g(۸))=f(۱۰)=۲ \rightarrow (۸,۲)$

$fog=\{(۴,۵)\ (۲,۵)\ (۶,۱۲)\ (۸,۲)\}$

$gof(۴)=g(f(۴))=g(۵) \rightarrow$ در مجموعه نیست.

$gof(۶)=g(f(۶))=g(۵) \rightarrow$ در مجموعه نیست.

$gof(۸)=g(f(۸))=g(۱۲) \rightarrow$ در مجموعه نیست.

$gof(۱۰)=g(f(۱۰))=g(۲)=۴ \rightarrow (۱۰,۴)$

$\rightarrow gof=\{(۱۰,۴)\}$

تمرین در کلاس صفحه ۷۹

۱ـ توابع زیر را در نظر بگیرید.

الف) $y=\frac{۱}{x-x^۲}$ ب) $y=۱-x^۲$ ج) $y=\sqrt{x}$ د) $y=\sqrt[۳]{x}$ هـ) $y=x-|x|$ و) $y=x\sqrt{|x|}$

قسمت‌های (۲) و (۳) و (۴) را از فرمول $f(-x)=f(x)$ برای توابع زوج و $f(-x)=-f(x)$ برای توابع فرد بررسی می‌کنیم.

(۱) دامنه کدام‌یک از توابع داده شده متقارن است؟ توابع: ب ـ هـ ـ و

(۲) کدام‌یک از این توابع زوج هستند؟ تابع: ب

(۳) کدام‌یک از این توابع فرد هستند؟ تابع: و

(۴) کدام‌یک از این توابع نه زوج هستند و نه فرد؟ توابع: الف ـ ج ـ د ـ هـ

الف) نه زوج است و نه فرد.

$$f(-x)=\frac{۱}{(-x)-(-x)^۲}=\frac{۱}{-x-x^۲}=\frac{۱}{-(x+x^۲)}$$

ب) زوج است

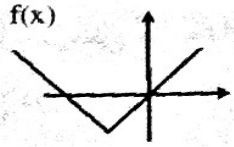
$$f(-x)=۱-(-x)^۲=۱-x^۲=f(x)$$

ج) اگر دامنه را کوچک کنیم:

$$f(-x)=\sqrt{-x} \Rightarrow \begin{cases} f(-x)=\sqrt{x}=f(x) \quad x<۰ & \text{زوج} \\ f(x)=\sqrt{-x} \text{ تعریف نشده } \Rightarrow x>۰ & \text{نه فرد نه زوج} \end{cases}$$

مسائل صفحه ۸۲

۱- نمودار توابع f ، g ، h و k و t در زیر داده شده‌اند در دو روش نموداری و جبری (ضابطه توابع) تعیین کنید که کدام یک از آن‌ها زوج، کدام یک فرد و کدام یک نه زوج و نه فرد هستند.

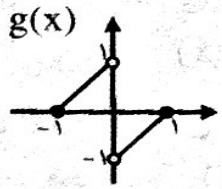


$$f(x)=|x+1|-1$$

نموداری: از روی نمودار نه زوج و نه فرد است چون نسبت به محور yها متقارن نیست و نسبت به مبدأ نیز متقارن نیست.

جبری: $f(-x)=|-x+1|-1 \rightarrow f(x)\neq f(-x) \rightarrow$ نه زوج نه فرد

نموداری: نسبت به مبدأ متقارن است پس فرد می‌باشد.

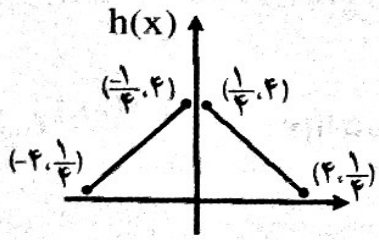


جبری:

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & -1\leq x\leq 0 \\ x-1 & 0<x\leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(-x)=-x-1=-(x+1)=-g(x) \rightarrow \text{فرد} \\ g(-x)=-x+1=-(x-1)=-g(x) \rightarrow \text{فرد} \end{cases}$$

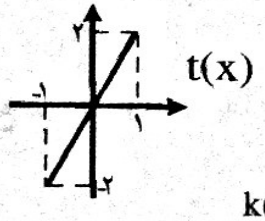
نموداری: نمودار چون نسبت به محور y متقارن است پس زوج است.



جبری:

$$h(x)=\begin{cases} x+\frac{17}{4} & -4\leq x\leq \frac{-1}{4} \\ -x+\frac{17}{4} & \frac{1}{4}\leq x\leq 4 \end{cases}$$

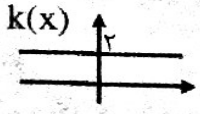
$$\begin{cases} h(-x)=-(-x)+\frac{17}{4}=x+\frac{17}{4}=h(x) \rightarrow \text{زوج} \\ h(-x)=-x+\frac{17}{4}=h(x) \rightarrow \text{زوج} \end{cases}$$



جبری:

$$t(x)=2x$$

$$t(-x)=-2x \rightarrow t(-x)=-t(x) \rightarrow \text{فرد}$$



نموداری: نمودار چون نسبت به مبدأ متقارن است فرد است.

جبری: $\begin{matrix} k(x)=2 \\ k(-x)=2 \end{matrix} \Rightarrow k(x)=k(-x) \rightarrow$ زوج

نموداری: نمودار نسبت به محور y متقارن است، پس فرد است.

۲- زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید:

الف) $f(x)=x\sqrt{5-x^2} \rightarrow f(-x)=-x\sqrt{5-(-x)^2}=-x\sqrt{5-x^2}=-f(x) \rightarrow$ فرد

ب) $f(x)=\frac{x^2-3}{x^3-1} \rightarrow f(-x)=\frac{(-x)^2-3}{(-x)^2-1}=\frac{x^2-3}{x^2-1}=f(x) \rightarrow$ زوج

ج) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ -1, & x<0 \end{cases} \rightarrow f(-x)=\begin{cases} -1 & x\geq 0 \\ +1 & x<0 \end{cases} \Rightarrow f(-x)=-f(x) \rightarrow$ فرد

د) $f(x)=|x| \rightarrow f(-x)=|-x|=|x| \rightarrow f(x)=f(-x) \rightarrow$ زوج

ه) $f(x)=2x+\sin(x) \rightarrow f(-x)=2(-x)+\sin(-x)=-(2x+\sin x)=-f(x) \rightarrow$ فرد

و) $f(x)=x^2+2x^8 \rightarrow f(-x)=(-x)^2+2(-x)^8=x^2+2x^8=f(x) \rightarrow$ زوج

۳ـ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) مجموع دو تابع زوج، تابعی زوج است.

$$\begin{cases} f(x)=f(-x) \\ g(x)=g(x) \end{cases} \rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)=(f+g)(-x)$$ زوج درست

ب) حاصل‌ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=f(-x).g(-x)=(f.g)(-x)$$ زوج درست

ج) حاصل ضرب دو تابع فرد، تابعی فرد است.

$$\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ g(-x)=-g(x) \end{cases} \rightarrow (f.g)(-x)=f(-x).g(-x)=-f(x)\times -g(x)=(f.g)(x)$$ زوج نادرست

د) حاصل ضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج، تابعی زوج است.

$$\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ g(-x)=g(x) \end{cases} \rightarrow (f.g)(-x)=f(-x).g(-x)=-f(x).g(x)=-(f.g)(x) \rightarrow$$ فرد نادرست

۴ـ فرض کنید f تابعی با دامنه متقارن باشد، ثابت کنید:

الف) $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ **تابعی زوج است.**

$$g(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x) \rightarrow$$ زوج

ب) $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ **تابعی فرد است.**

$$h(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=\frac{-(f(x)-f(-x))}{2}=-h(x) \rightarrow$$ فرد

ج) f را می‌توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{2f(x)}{2}=f(x)=g+h$$

د) تابع $f(x)=2x^3-10x^2+2\sqrt{1+x^2}-5$ **را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.**

$$f(x)=(2x^3)+(-10x^2+2\sqrt{1+x^2}-5) \rightarrow \begin{cases} 2x^3 & \text{فرد است} \\ -10x^2+2\sqrt{1+x^2}-5 & \text{زوج است} \end{cases}$$

۵ـ آیا تابعی یافت می‌شود که هم زوج باشد و هم فرد؟ چند تابع با این ویژگی داریم؟

بله، تابع $f(x)=0$ تنها تابع هم زوج و هم فرد است.

۶ـ در هر یک از حالت‌های زیر نقطه‌ای از نمودار یک تابع داده شده است. نقطه دیگری از نمودار تابع را بیابید در صورتی که: (۱) تابع زوج باشد. (۲) تابع فرد باشد.

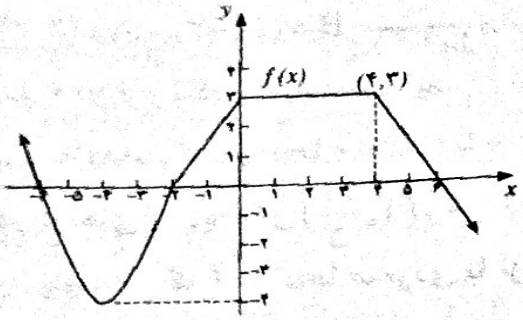
الف) $(-7,2) \rightarrow$ (۱) $(7,2)$ (۲) $(-7,-2)$

ب) $(a,b) \rightarrow$ (۱) $(-a,b)$ (۲) $(-a,b)$

ج) $(\frac{-2}{7},-7) \rightarrow$ (۱) $(\frac{2}{7},-7)$ (۲) $(\frac{2}{7},7)$

د) (۵,۳) → (۱) (-۵,۳) (۲) (-۵,-۳)

۷- با استفاده از نمودار تابع f(x) که در شکل زیر رسم شده است، بازه هایی را که تابع در آن‌ها صعودی، نزولی یا ثابت است را معلوم کنید. نمودار برای مقادیر کم‌تر یا مساوی ۲- بخشی از یک سهمی است. معادله‌ای برای این تابع بنویسید.



$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2-4 & x\le -2\\ \frac{3}{2}x+3 & -2<x\le 0\\ 3 & 0<x\le 4\\ \frac{-3}{2}x+9 & x>4\end{cases}$$

در بازه $(-\infty,-4)$ اکید نزولی

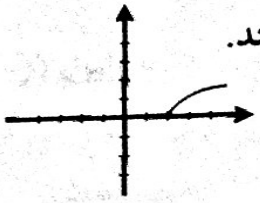
در بازه $[-4,0]$ اکید صعودی

در بازه $[0,4]$ ثابت

در بازه $[4,+\infty)$ اکید نزولی

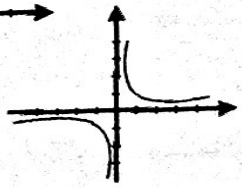
۸- تعیین کنید توابع زیر در چه بازه هایی صعودی یا نزولی هستند.

الف) $f(x)=\sqrt{x-2}$



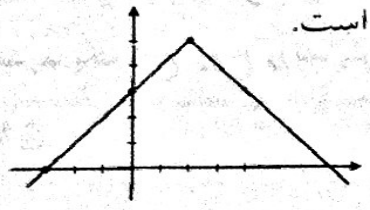
$f(x)=\sqrt{x-2}$ در $[2,+\infty)$ اکید صعودی است.

ب) $f(x)=\frac{1}{x}$



$f(x)=\frac{1}{x}$ در بازه $(-\infty,0)$ اکید نزولی و در نقطه $x=0$ تعریف نشده و در بازه $(0,+\infty)$ نزولی اکید.

ج) $f(x)=-|x-2|+5$



$f(x)=-|x-2|+5$ در بازه $(-\infty,2]$ صعودی اکید و در بازه $[2,+\infty)$ نزولی اکید است.

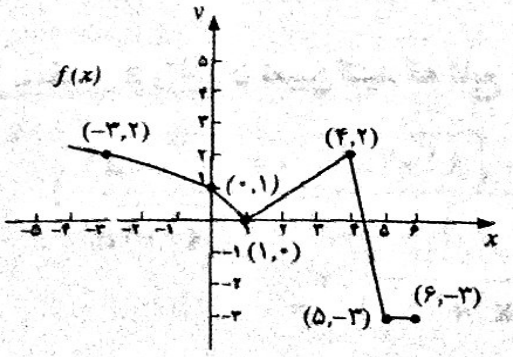
د) $f(x)=\begin{cases}-3x-18 & x<-5\\ 1 & -5\le x<1\\ x+2 & x\ge 1\end{cases}$

در بازه $x<-5$ نزولی

در بازه $(-5$ و $1)$ ثابت

در بازه $x\ge 1$ صعودی است

۹- نمودار تابع f(x) در زیر آمده است.



با استفاده از نمودار تابع f(x) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه و برد f را پیدا کنید.

دامنه $D=(-\infty,6]$ برد $R=[-3,+\infty)$

نمودار $f(x)$، محور xها را در دو نقطه قطع کرده است یکی نقطه $x=1$ و دیگری نقطه‌ای که در خط شامل دو نقطه $A=(4,2)$ و $B=(5,-3)$ است پس برای به دست آوردن نقطه دقیق، خطی که از A و B می‌گذرد را به دست آورده و بعد $y=0$ قرار داده تا x به دست آید.

ب) بازه‌هایی که در آن‌ها $f(x)<0$ یا $f(x)>0$ را بیابید.

در بازه‌های $(-\infty,1)$ و $(1,\frac{22}{5})$، $f(x)>0$ و در بازه $(\frac{22}{5},6]$، $f(x)<0$ می‌باشد.

ج) بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است را بیابید.

f در بازه‌های $(-\infty,1]$ و $[4,5]$ نزولی اکید و در بازه $[1,4]$ صعودی اکید است. در بازه $[5,6]$ تابع ثابت است.

د) معادله‌ای برای f بیابید (تابع برای مقادیر کم‌تر از ۱ یک تابع رادیکالی به شکل $\sqrt{ax+b}$ است).

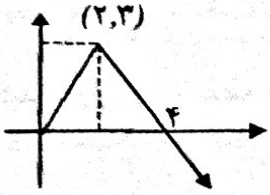
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x\le 1\\ y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3} & 1<x\le 4\\ y=-5x+22 & 4<x<5\\ -3 & 5\le x\le 6\end{cases}$$

هـ) $f(\frac{7}{2})$ و $f(5,3)$ و $f(-4)$ را بیابید.

$f(-4)=\sqrt{1-(-4)}=\sqrt{5}$

$f(\frac{7}{2})=\frac{2}{3}\times\frac{7}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

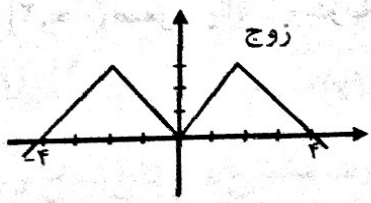
$f(5/3)=-3$



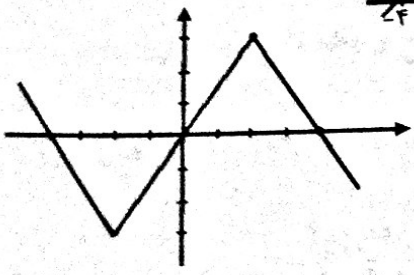
۱۰ ـ نمودار تابع h در شکل روبه‌رو داده شده است.

الف) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

زوج



ب) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودارجدید یک تابع فرد را نمایش دهد. فرد



۱۱ ـ مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+4a^2})$ یک تابع فرد باشد.

$$f(-x)=\log(-x+\sqrt{x^2+4a^2})\xrightarrow{\text{ضرب در مزدوج}}f(-x)=\log\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+4a^2}}{1}\times\frac{x+\sqrt{x^2+4a^2}}{x+\sqrt{x^2+4a^2}}\right)$$

$$f(-x)=\log\left(\frac{4a^2}{x+\sqrt{x^2+4a^2}}\right)\xrightarrow{\text{اگر } 4a^2=1}f(-x)=\log(x+\sqrt{x^2+4a^2})^{-1}=$$

$$-\log(x+\sqrt{x^2+4a^2})=-f(x)\quad\Rightarrow\quad 4a^2=1\rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$$

۱۱- زوج یا فرد بودن توابع f و g را که در زیر آمده است تعیین کنید.

$f=\{(-۲,۵),(-۱,۴),(۰,۳),(۱,۴),(۲,۵)\}$ $\qquad$ $g=\{(-۲,۱),(-۱,۲),(۰,۰),(۱,-۲),(۲,-۱)\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(۲)=f(-۲)=۵ \\ f(۱)=f(-۱)=۴ \\ f(۰)=f(۰)=۳ \end{array}\right\} \rightarrow f(x)=f(-x) \rightarrow \text{زوج } f$$

$$\left.\begin{array}{l} g(-۲)=۱ \\ g(۲)=-۱ \\ g(-۱)=۲ \\ g(۱)=-۲ \\ g(۰)=۰ \end{array}\right\} \rightarrow g(-۲)=-g(۲),\ g(-۱)=-g(۱) \rightarrow g(-x)=-g(x) \rightarrow \text{فرد } g$$

فعالیت ۸ ـ صفحه ۸۵

۱- محیط هر مربع تابعی از اندازه‌ی یک ضلع آن است. محیط را با p و طول ضلع را با l نشان دهید و p را به صورت تابعی از l بنویسید. آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ بله، تابع یک‌به‌یک است.

$p(l)=۴l$

۲- اندازه‌ی ضلع هر مربع تابعی از محیط آن است. با نمادهای بالا l را به صورت تابعی از p بنویسید.

$l(p)=\frac{p}{۴}$

۳- این دو تابع را بر حسب یک متغیر x به صورت $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بنویسید.

$p(l)=f(x)=۴x \quad , \quad l(p)=g(x)=\frac{x}{۴}$

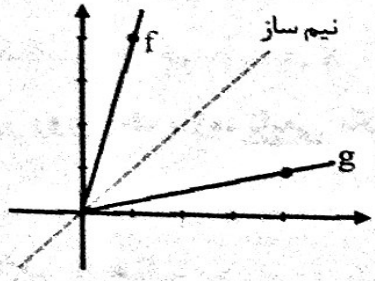
۴- با توجه به دامنه و برد این دو تابع، نمودار آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یک‌دیگرند.

(توجه داشته باشید که قرینه نقطه $A(a,b)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نقطه $B(b,a)$ است.)

نسبت به نیمساز قرینه‌اند

x	۰	۱
f(x)	۰	۴

x	۰	۴
g(x)	۰	۱



بحث در کلاس صفحه ۹۴

وارون یک تابع صعودی (اکید)، صعودی است یا نزولی؟ وارون یک تابع نزولی (اکید) چگونه است؟

بله، با توجه به نمودار برخی توابع، وارون یک تابع صعودی (اکید) نیز صعودی است و وارون یک تابع نزولی (اکید) نیز نزولی است.

مسائل صفحه ۹۴

۱ ـ تحقیق کنید که توابع $f(x)=\frac{1}{x}+2$ و $g(x)=\frac{1}{x-2}$ وارون یک‌دیگرند. برای کدام مقادیر x داریم $f(g(x))=x$ و برای کدام مقادیر x داریم $g(f(x))=x$؟

$$f(g(x))=\frac{1}{g(x)}+2=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}+2=x-2+2=x \qquad g(f(x))=\frac{1}{f(x)-2}=\frac{1}{\frac{1}{x}+2-2}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

چون این دو تابع وارون یکدیگرند به ازای هر x در دامنه f $(D_f=\mathbb{R}-\{0\})$ داریم: $g(f(x))=x$

چون این دو تابع وارون یکدیگرند به ازای هر x در دامنه g $(D_g=\mathbb{R}-\{2\})$ داریم: $f(g(x))=x$

۲ ـ فرض کنید تابع f دارای وارون است. اگر نمودار f در ربع اول واقع شود، نمودار f^{-1} در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟ اگر نمودار f در ربع اول باشد نمودار f^{-1} نیز در ربع اول خواهد بود چون نمودارهای f و f^{-1} نسبت به نیم‌ساز ربع اول قرینه‌اند و این یعنی به ازای هر نقطه (a,b) عضو f نقطه (b,a) عضو f^{-1} است پس اگر تمام نقاط f در ربع اول با مختص‌های مثبت باشند تمام نقاط f^{-1} نیز در ربع اول با مختص‌های مثبت خواهند بود.

۳ ـ نشان دهید تابع $f(x)=|x-2|+3$ یک‌به‌یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک‌به‌یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

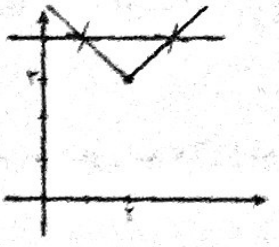
$f:[2,+\infty) \rightarrow [3,+\infty)$

$f(x)=|x-2|+3$ یک‌به‌یک است.

$$x=|y-2|+3 \rightarrow x-3=|y-2| \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{دو طرف به}} x^2-6x+9=y^2-4y+4$$

$$y^2-4y-(x^2-6x+5)=0 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=16+4x^2-24x+20=(2x-6)^2$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm|2x-6|}{2}=2+|x-3| \rightarrow f^{-1}=|x-3|+2$$



چون نمودار در ناحیه اول است مثبت را قبول داریم.

۴ ـ در هر یک از حالت‌های زیر نشان دهید که توابع f و g وارون یک دیگرند.

الف) $f(x)=x^3-5$ ، $g(x)=\sqrt[3]{x+5}$

$$f(g(x))=(\sqrt[3]{x+5})^3-5=x+5-5=x$$
$$g(f(x))=\sqrt[3]{x^3-5+5}=\sqrt[3]{x^3}=x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}=g \quad , \quad g^{-1}=f$$

ب) $f(x)=\sqrt{x-2}$ ، $g(x)=x^2+2x\geq 0$

$$f(g(x))=\sqrt{x^2+2x-2}\neq x$$
$$g(f(x))=(\sqrt{x-2})^2+2x=x-2+2x\neq x \quad \Rightarrow$$

پس f , g وارون یکدیگر نیستند.

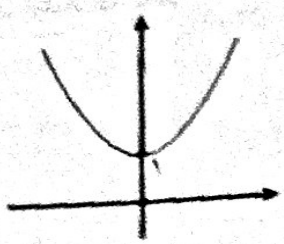
۵ـ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون‌پذیر نباشد.

ب) برای هر عدد حقیقی x ، $x<f(x)$

چون یک‌به‌یک نیست پس وارون ندارد.

و چون $f(x)=x^2+1$ پس به ازای هر x داریم: $x<f(x)$



۶ـ وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند به دست آورید.

الف)

$f(x)=(x+5)^2 \qquad x\geq -5 \rightarrow D_f=[-5,+\infty)$

یک‌به‌یک ⇐ وارون‌پذیر $\qquad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow (x_1+5)^2=(x_2+5)^2 \xrightarrow[D_f]{\text{با توجه به}} x_1+5=x_2+5 \Rightarrow x_1=x_2$

$x=(y+5)^2 \Rightarrow x=y^2+10y+25 \Rightarrow y^2+10y+25-x=0 \Rightarrow$

$$y=\frac{-10\pm\sqrt{100-4(25-x)}}{2}=\frac{-10\pm2\sqrt{x}}{2}=\begin{cases}-5+\sqrt{x} \rightarrow f^{-1}(x)=-5+\sqrt{x}\\ -5-\sqrt{x} \xrightarrow{\text{با توجه به } f} \text{غ ق ق}\end{cases}$$

ب)

$f(x)=-|x-1|+1 \qquad x\geq 1 \qquad D_f=[1,+\infty)$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow -|x_1-1|+1=-|x_2-1|+1 \Rightarrow |x_1-1|^2=|x_2-1|^2$

$\xrightarrow[D_f]{\text{با توجه به}} x_1-1=x_2-1 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$ یک‌به‌یک ⇐ وارون‌پذیر

$x=-|y-1|+1 \Rightarrow (|y-1|=1-x)^2 \Rightarrow y^2-2y+1=1-2x+x^2 \Rightarrow$

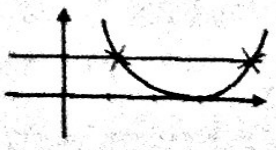
$y^2-2y-(x^2-2x)=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-2)^2+4(1)(x^2-2x)=4+4x^2-8x \Rightarrow$

$$4(x^2-2x+1)=4(x-1)^2 \Rightarrow y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{4(x-1)^2}}{2}=\begin{cases}1+|x-1|\\ 1-|x-1| \rightarrow \text{غ ق ق (خود تابع)}\end{cases}$$

$f^{-1}(x)=|x-1|+1$

ج)

$f(x)=(x-3)^2$



وارون‌پذیر نیست و یک‌به‌یک نیست

(دامنه را مانند قسمت‌های قبلی کوچک نکرده است.)

د)

$f(x)=\sqrt{x+2}-3 \qquad D_f=[-2,+\infty)$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1+2}-3=\sqrt{x_2+2}-3 \Rightarrow \sqrt{x_1+2}=\sqrt{x_2+2} \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{با توجه به } D_f} x_1+2=x_2+2 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$

یک‌به‌یک ⇐ وارون پذیر

$x=\sqrt{y+2}-3$

$\Rightarrow (x+3=\sqrt{y+2})^2 \Rightarrow x^2+6x+9=y+2 \Rightarrow y=x^2+6x+7 \Rightarrow f^{-1}(x)=x^2+6x+7$

۷ـ نشان دهید که تابع $f(x)=\frac{3x-2}{5x-3}$ وارون خودش است.

$$fof(x)=f(f(x))=\frac{3\frac{3x-2}{5x-3}-2}{5\frac{3x-2}{5x-3}-3}=\frac{\frac{9x-6-10x+6}{5x-3}}{\frac{15x-10-15x+9}{5x-3}}=\frac{-x}{-1}=x \Rightarrow f=f^{-1}$$

۸ـ تابع $f(x)=ax+b$ ، $a\neq 0$ داده شده است همه مقادیر a و b را که به ازای آن‌ها $f^{-1}(x)=f(x)$ باشد را بیابید.

$$f(x)=ax+b \rightarrow x=ay+b \Rightarrow ay=x-b \Rightarrow y=\frac{x-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$$

$$f^{-1}=f \Rightarrow \frac{x}{a}-\frac{b}{a}=ax+b \xRightarrow{\text{هم‌ارزی}} \begin{cases} a=\frac{1}{a} \Rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1 \\ b=\frac{-b}{a} \Rightarrow a=-1 \end{cases} \Rightarrow a=-1$$

برای تابع $f(x)=ax+b$ به ازای $a=-1$ و هر $b\in R$ داریم: $f=f^{-1}$

۹ـ در مورد وارون‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\leq -1 \\ x^2 & -1<x<1 \\ x+1 & 1\leq x \end{cases}$ **تحقیق کنید.**

برای نشان دادن وارون‌پذیر نبودن $f(x)$ همین کافی است که $f(x)$ در $(-1,1)$ یک‌به‌یک نیست.

$$x_1,x_2\in(-\infty,-1] \qquad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2+2=x_2^2+2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow$$

$$|x_1|=|x_2| \xrightarrow{x_1\leq -1,\, x_2\leq -1} -x_1=-x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

پس در بازه $(-\infty,-1]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

$$x_1,x_2\in(-1,1) \;:\; f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow |x_1|=|x_2| \xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}} x_1=\pm x_2$$

یک‌به‌یک نیست

$$x_1,x_2\in[1,+\infty): f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1\cancel{+1}=x_2\cancel{+1} \Rightarrow x_1=x_2$$

پس در بازه $[1,+\infty)$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

۱۰ـ اگر $f(x)=x+3$ و $g(x)=3x-7$ توابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x)=x+3 \rightarrow x=y+3 \rightarrow y=x-3 \rightarrow f^{-1}(x)=x-3$$

$$g(x)=3x-7 \rightarrow x=3y-7 \rightarrow y=\frac{x+7}{3} \rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x+7}{3}$$

الف) $(fog)^{-1}$

$$(fog)(x)=f(g)=3x-7+3=3x-4 \rightarrow x=3y-4 \rightarrow y=\frac{x+4}{3} \rightarrow (fog)^{-1}(x)=\frac{x+4}{3}$$

ب) $g^{-1}of^{-1}$

$$(g^{-1}of^{-1})(x)=\frac{x-3+7}{3}=\frac{x+4}{3}$$

نکته: $fof^{-1}=f^{-1}of=x$ $\qquad$ $fox=xof=f$ تابع همانی $\rightarrow g(x)=x$

۱۱ـ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه‌ی $h(t)=100-\frac{49}{10}t^2$ به دست می‌آید.

الف) **دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.** $\qquad$ برد $R=[0,100]$ $\qquad$ $D=[0,+\infty)$

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک‌به‌یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

چون فقط مقادیر مثبت به جای t قرار می‌گیرد بنابراین تابع یک‌به‌یک است و معنای فیزیکی آن این است که در یک زمان سنگ در دو ارتفاع قرار ندارد.

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

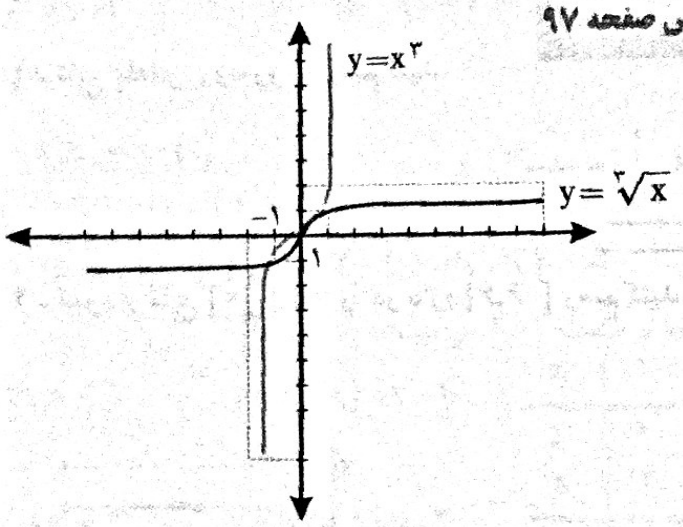
$$x=100-\frac{49}{10}y^2 \quad \frac{49}{10}y^2=100-x \quad \rightarrow \quad y=\sqrt{\frac{1000}{49}-\frac{10x}{49}}$$

$$h^{-1}(t)=\frac{\sqrt{1000-10t}}{7}$$

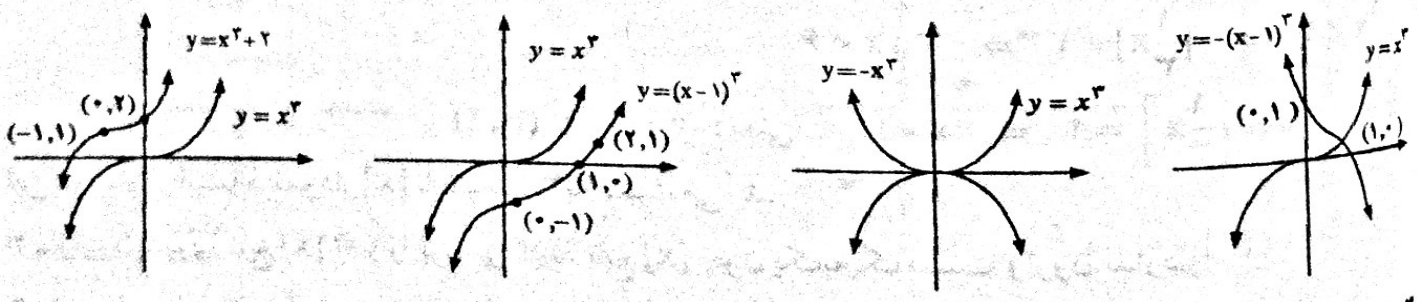
د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می‌کند؟ این است که نشان می‌دهد ارتفاعی که سنگ در آن قرار دارد در چه زمانی اتفاق می‌افتد و مقادیر ارتفاع را به زمان تبدیل می‌کند.

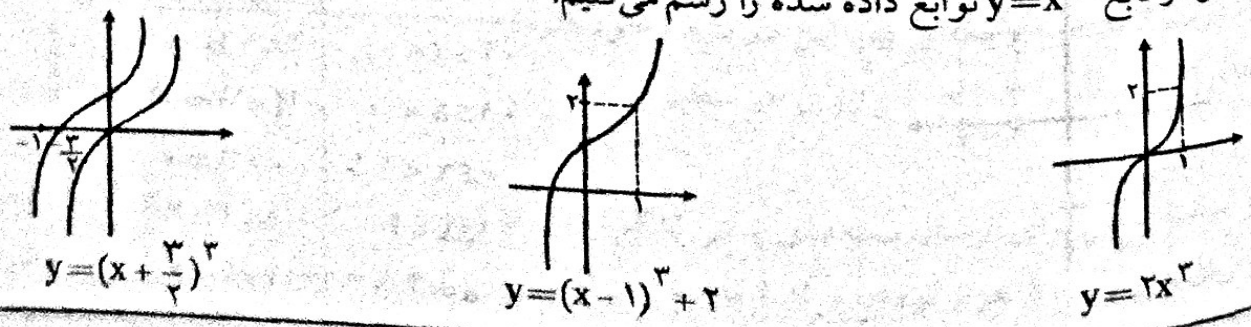
تمرین در کلاس صفحه ۹۷

۱- نمودار $y=\sqrt[3]{x}$ را در همان دستگاه مختصات به همراه نمودار $y=x^3$ رسم کنید.



۲- در هر یک از شکل‌های زیر نمودار تابع $y=x^3$ و نمودار یک تابع دیگر که به کمک آن به دست آمده است در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. ضابطه نمودار تابع جدید را بنویسید.



۳- نمودار توابع $y=(x+\frac{3}{2})^3$ و $y=(x-1)^3+2$ و $y=2x^3$ را به کمک نمودار تابع $y=x^2$ رسم کنید.

به کمک نمودار تابع $y=x^3$ توابع داده شده را رسم می‌کنیم: